Приложение №1. Примеры определения спектральных и корреляционных характеристик непериодических сигналов

Пример 1. Определить спектральную плотность, амплитудный и фазовый спектр сигнала рис.п.1.

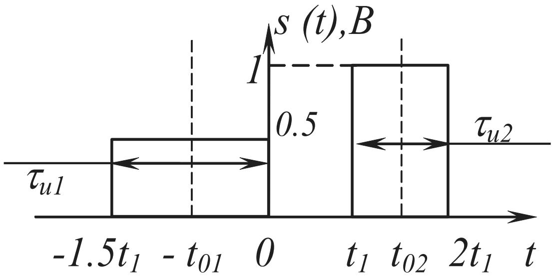

Рис.п.1. Заданный сигнал

Заданный сигнал можно представить в виде суммы двух прямоугольных импульсов

$$s(t) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t+t_{01}}{\tau_{u1}}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_{02}}{\tau_{u2}}\right),$$

где $\tau_{u1} = 1.5t_1$ - длительность прямоугольного импульса, смещённого влево на $t_{01} = 1.5t_1/2$;

$\tau_{u2} = 2t_1 - t_1 = t_1$ - длительность прямоугольного импульса, смещённого вправо на $t_{02} = (t_1 + 2t_1)/2 = 3t_1/2$.

Спектральная плотность одиночного симметричного прямоугольного импульса длительностью τ_u с единичным размахом определяется выражением (табл.1)

$$S_0(\omega) = \tau_u \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right).$$

При сдвиге графика прямоугольного импульса его спектральную плотность можно определить с учётом свойства смещения (табл.3,п.2)

$$S_0(\omega) = \tau_u \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right)e^{\pm i\omega t_0},$$

где t_0 - параметр смещения. Знак “+” соответствует смещению влево, а “-” – смещению вправо относительно нулевой абсциссы. Таким образом

$$\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t+t_{01}}{\tau_{u1}}\right) \leftrightarrow \frac{1}{2}\tau_{u1}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{u1}}{2}\right)e^{i\omega t_{01}};$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_{02}}{\tau_{u2}}\right) \leftrightarrow \tau_{u2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_{u2}}{2}\right)e^{-i\omega t_{02}}.$$

С учетом линейности преобразования Фурье для спектральной плотности заданного сигнала получим

$$S(\omega)=\frac{1}{2}\tau_{u1}\operatorname{sinc}\left(\omega\tau_{u1}/2\right)e^{i\omega t_{01}}+\tau_{u2}\operatorname{sinc}\left(\omega\tau_{u2}/2\right)e^{-i\omega t_{02}}.$$

Амплитудный спектр сигнала

$$|S(\omega)|=\sqrt{S(\omega)S^{*}(\omega)}=\sqrt{\begin{array}{l}(1/4)\tau_{u1}{}^{2}\operatorname{sinc}^{2}\left(\omega\tau_{u1}/2\right)+\tau_{u2}{}^{2}\operatorname{sinc}^{2}\left(\omega\tau_{u2}/2\right)+\\ +\tau_{u1}\tau_{u2}\operatorname{sinc}\left(\omega\tau_{u1}/2\right)\operatorname{sinc}\left(\omega\tau_{u2}/2\right)\cos\left[\omega(t_{01}+t_{02})\right]\end{array}}.$$

Фазовый спектр сигнала

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\tau_{u1}\operatorname{sinc}\left(\omega\tau_{u1}/2\right)\sin\left(\omega t_{01}\right)-2\tau_{u2}\operatorname{sinc}\left(\omega\tau_{u2}/2\right)\sin\left(\omega t_{02}\right)}{\tau_{u1}\operatorname{sinc}\left(\omega\tau_{u1}/2\right)\cos\left(\omega t_{01}\right)+2\tau_{u2}\operatorname{sinc}\left(\omega\tau_{u2}/2\right)\cos\left(\omega t_{02}\right)}\right).$$

Пример 2. Определить спектральную плотность, амплитудный и фазовый спектр сигнала рис.п.2.

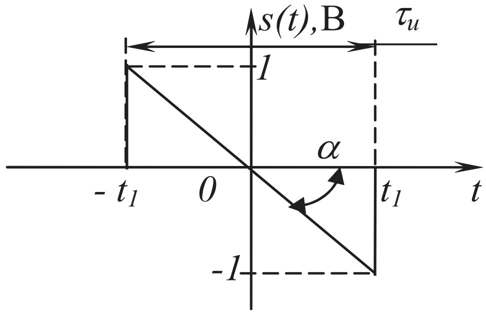

Рис.п.2. Заданный сигнал

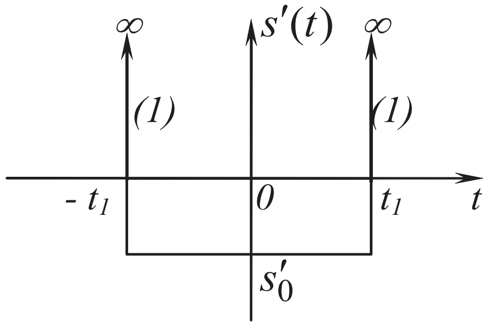

Рис.п.3. Результат дифференцирования сигнала

Рассмотрение рис.п.2 показывает, что на интервале $[-t_1,t_1]$ график заданного сигнала представляет собой отрезок прямой, поэтому спектральную плотность проще определить для его производной, которая на этом интервале будет постоянна. График производной заданного сигнала показан на рис.п.3. δ - функции в моменты времени t_1 и t_2 появляются из-за наличия скачков на графике сигнала. Значение s_0' равно производной линейной функции, которая постоянна и, как следует из рис.п.2, равна

$$s_0'=-tg(\alpha)=-1/t_1=-2/\tau_u,$$

где $\tau_u=2t_1$ – длительность заданного сигнала.

Запишем аналитическое выражение для производной сигнала (рис.п.3.)

$$s'(t)=\delta\left(t+\tau_u/2\right)-\left(2/\tau_u\right)\operatorname{rect}\left(t/\tau_u\right)+\delta\left(t-\tau_u/2\right),$$

Определим спектральную плотность полученного сигнала. Так как преобразование Фурье линейно, то достаточно найти спектральную плотность каждой из аддитивных составляющих сигнала, а затем сложить результаты. Спектральные плотности составляющих (табл.1), с учётом свойства смещения (табл.3,п.2)

$$\delta(t+\tau_u/2) \leftrightarrow e^{j\omega\frac{\tau_u}{2}}, \ \delta(t-\tau_u/2) \leftrightarrow e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}},$$

$$-\frac{2}{\tau_u}\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau_u}\right) \leftrightarrow -\frac{2}{\tau_u}\tau_u \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right) = -2\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{2}\right).$$

Для спектральной плотности производной сигнала получим

$$S_d(\omega) = e^{j\omega\frac{\tau_u}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau_u}{2}} - 2\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\,\tau_u}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{\omega\,\tau_u}{2}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\,\tau_u}{2}\right)\right]$$

Определяя спектральную плотность заданного сигнала воспользуемся свойством дифференцирования сигнала (табл.3,п.3), согласно которому

$$S(\omega) = S_d(\omega)/j\omega = (2j/\omega)[\operatorname{sinc}(\omega\tau_u/2) - \cos(\omega\tau_u/2)].$$

Амплитудный спектр заданного сигнала

$$|S(\omega)| = (2/|\,\omega\,|)|\operatorname{sinc}(\omega\tau_u/2) - \cos(\omega\tau_u/2)|.$$

Фазовый спектр заданного сигнала

$$\varphi(\omega) = \arg(S(\omega)) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\left(\frac{1}{\omega}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\,\tau_u}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega\,\tau_u}{2}\right)\right]\right).$$

Пример 3. Определить спектральную плотность, амплитудный и фазовый спектр, а также АКФ сигнала рис.п.4.

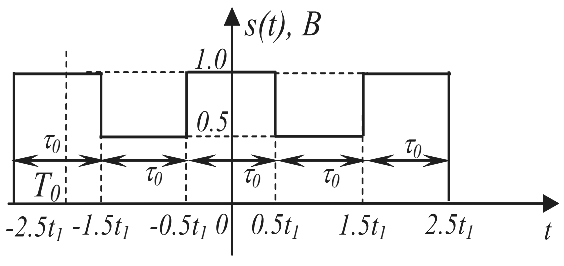

Рис.п.4. Заданный сигнал

Заданный сигнал можно рассматривать как кодированный: интервал его задания можно представить в виде совокупности одинаковых отрезков, на каждом из которых сигнал принимает постоянное значение.

Таким образом

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_0 - k\tau_0}{\tau_0}\right),$$

где $N=5$ - число кодовых элементов;
$\tau_0 = t_1$ - длительность такта;
$T_0 = \frac{-2.5t_1 - 1.5t_1}{2} = -\frac{4t_1}{2} = -2t_1$ - середина первого такта.
$\{a_k\}_{k=0}^{N-1} = \{1; 0.5; 1; 0.5; 1\}$ В - кодовая последовательность.
Спектральная плотность кодированного сигнала определяется выражением

$$S(\omega) = \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right) e^{-i\omega T_0} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-i\omega k\tau_0}.$$

Заданный сигнал является чётным, поэтому его спектральная плотность должна быть действительной функцией, то есть

$$S(\omega) = \operatorname{Re} S(\omega) = \tau_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right) \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(\omega(k\tau_0 + T_0)).$$

Амплитудный спектр сигнала

$$|S(\omega)| = \tau_0 \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right) \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(\omega(k\tau_0 + T_0)) \right|,$$

фазовый спектр

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \operatorname{sign}\left(\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cos(\omega(k\tau_0 + T_0))\right)\right]\operatorname{sign}(\omega).$$

АКФ кодированного сигнала определяется выражением

$$R(\tau) = \tau_0 \sum_{k=0}^{N-1} R_k \left(1 - \frac{\left||\tau| - k\tau_0\right|}{\tau_0}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{|\tau| - k\tau_0}{2\tau_0}\right),$$

где $R_k = \sum_{n=k}^{N-1} a_n a_{n-k}$, $k = 0,\dots,N-1$ - АКФ кодовой последовательности, расчёт которой оформим в виде следующей таблицы:

k	1	0.5	1	0.5	1	R_k
0	1	0.5	1	0.5	1	3.5
1		1	0.5	1	0.5	2
2			1	0.5	1	2.25
3				1	0.5	1
4					1	1
k>4						0

Пример 4. Определить АКФ сигнала рис.п.5.а.
Заданный сигнал можно представить в виде суммы двух сигналов (рис.5.а, б, в)

$$s_1(t)=\begin{cases}-\left(1+\dfrac{2t}{\tau_u}\right), -\dfrac{\tau_u}{2}\le t\le 0\\ 0;\ t<-\dfrac{\tau_u}{2}, t>0\end{cases},\quad s_2(t)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{2t}{\tau_u}\right), 0\le t\le \dfrac{\tau_u}{2}\\ 0;\ t>\dfrac{\tau_u}{2}, t<0\end{cases}.$$

При этом его АКФ можно выразить следующим образом
$R(\tau)=R_1(\tau)+R_2(\tau)+R_{12}(\tau)+R_{21}(\tau)$.

Будем искать выражение АКФ для положительных значений $\tau\ge 0$

$$R^+(\tau)=R_1^+(\tau)+R_2^+(\tau)+R_{12}^+(\tau)+R_{21}^+(\tau).$$

При этом сдвиги в корреляционных интегралах следует выполнять в положительном направлении временной оси.

Как видно из рис. п.5.б и рис. п.5.в, сигнал $s_1(t)$ может быть получен из $s_2(t)$ путём зеркального отображения относительно оси абсцисс, а затем – оси ординат. Так как информация о зеркальных отображениях сигнала содержится в фазовом спектре, то амплитудные спектры у рассматриваемых сигналов одинаковы. В свою очередь АКФ определяется только амплитудным спектром сигнала и не зависит от фазового спектра. Следовательно, АКФ сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ одинаковы

$$R_1^+(\tau)=R_2^+(\tau).$$

Тогда для искомой АКФ заданного сигнала имеем

$$R^+(\tau)=2R_2^+(\tau)+R_{12}^+(\tau)+R_{21}^+(\tau).$$

Расчёт ВКФ $R_{12}^+(\tau)$ иллюстрируется рис.п.5.г, из которого видно, что

$$R_{12}^+(\tau)=0,$$

так как равно нулю произведение сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t-\tau)$.
Это позволяет выражение для АКФ заданного сигнала переписать в виде

$$R^+(\tau)=2R_2^+(\tau)+R_{21}^+(\tau).$$

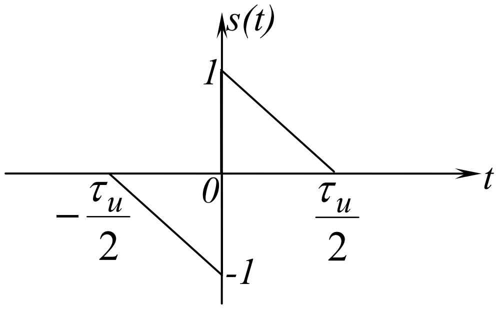

Рис.п.5.а. Заданный сигнал

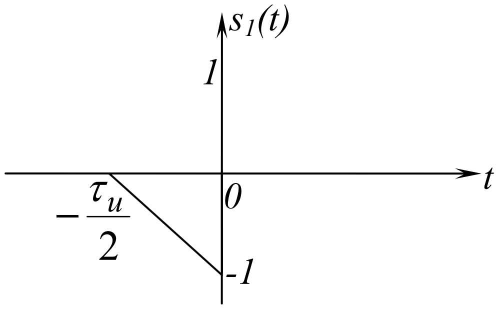

Рис.п.5.б. Первый сигнал

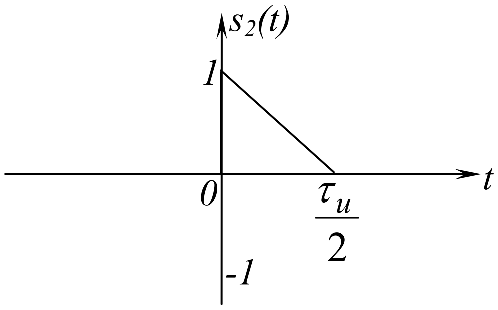

Рис.п.5.в. Второй сигнал

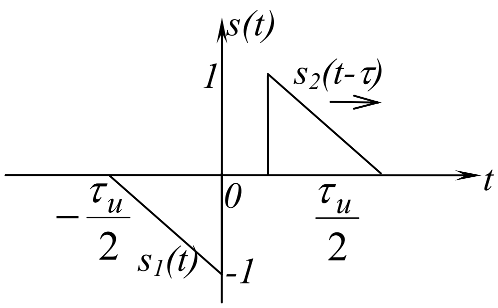

Рис.п.5.г.Расчёт ВКФ $R_{12}(\tau)$

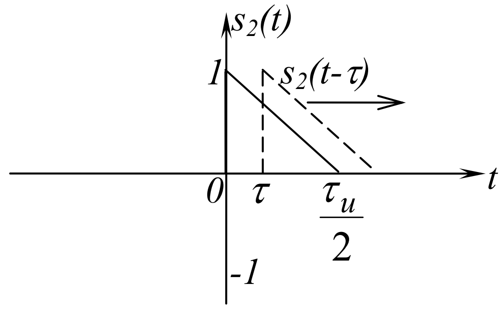

Рис.п.5.д. Расчёт АКФ $R_2(\tau)$

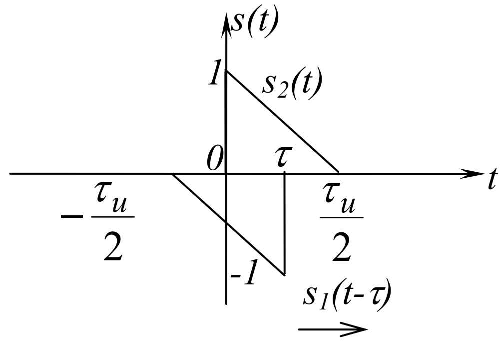

Рис.п.5.е. Расчёт ВКФ
$R_{21}(\tau \le 0.5\tau_и)$

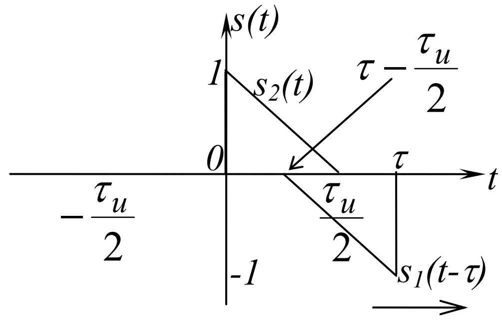

Рис.п.5.ж. Расчёт ВКФ
$R_{21}(0.5\tau_и \le \tau \le \tau_и)$

Рассмотрим функцию вида

$$r(k_1,k_2,a,b,\tau)=\int_a^b(1-k_1t)(1-k_2(t-\tau))dt=$$

$$=\int_a^b(1-k_1t)(1-k_2t+k_2\tau)dt=\int_a^b(1+k_2\tau-(k_2+k_1+k_1k_2\tau)t+k_1k_2t^2)dt=,$$

$$=(1+k_2\tau)t-\frac{1}{2}(k_2+k_1+k_1k_2\tau)t^2+\frac{1}{3}k_1k_2t^3\Big|_a^b=$$

$$=\rho(k_1,k_2,b,\tau)-\rho(k_1,k_2,a,\tau)$$

где $\rho(k_1,k_2,x,\tau)=(1+k_2\tau)x-\frac{1}{2}(k_2+k_1+k_1k_2\tau)x^2+\frac{1}{3}k_1k_2x^3$.

Для АКФ второго сигнала, в соответствии с рис.п.5.д, при $0\le\tau\le\frac{\tau_u}{2}$ запишем

$$R_2^+(\tau)=\int_\tau^{\frac{\tau_u}{2}}s_2(t)s_2(t-\tau)dt=\int_\tau^{\frac{\tau_u}{2}}\left(1-\frac{2t}{\tau_u}\right)\left(1-\frac{2(t-\tau)}{\tau_u}\right)dt=;$$

$$=r\left(\frac{2}{\tau_u},\frac{2}{\tau_u},\tau,\frac{\tau_u}{2},\tau\right)=\rho\left(\frac{2}{\tau_u},\frac{2}{\tau_u},\frac{\tau_u}{2},\tau\right)-\rho\left(\frac{2}{\tau_u},\frac{2}{\tau_u},\tau,\tau\right)$$

$$\rho\left(\frac{2}{\tau_u},\frac{2}{\tau_u},\frac{\tau_u}{2},\tau\right)=\left(1+\frac{2}{\tau_u}\tau\right)\frac{\tau_u}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\tau_u}+\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\tau\right)\left(\frac{\tau_u}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\left(\frac{\tau_u}{2}\right)^3=;$$

$$=\tau-\frac{\tau}{2}+\frac{\tau_u}{6}$$

$$\rho\left(\frac{2}{\tau_u},\frac{2}{\tau_u},\tau,\tau\right)=\left(1+\frac{2}{\tau_u}\tau\right)\tau-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\tau_u}+\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\tau\right)\tau^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\tau^3=$$

$$=\left(1+\frac{2}{\tau_u}\tau\right)\tau-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\tau_u}+\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\tau\right)\tau^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\tau^3= \qquad ;$$

$$=\tau-\frac{2}{3\tau_u^2}\tau^3$$

$$R_2^+(\tau)=\tau-\frac{\tau}{2}+\frac{\tau_u}{6}-\tau+\frac{2}{3\tau_u^2}\tau^3=\frac{\tau_u}{6}-\frac{\tau}{2}+\frac{2\tau^3}{3\tau_u^2},\ 0\le\tau\le\frac{\tau_u}{2}\cdot$$

Выражение для АКФ второго сигнала

$$R_2^+(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\tau_u}{6}-\dfrac{\tau}{2}+\dfrac{2\tau^3}{3\tau_u^2},\ 0\le\tau\le\dfrac{\tau_u}{2} \\ 0,\ \ \tau>\dfrac{\tau_u}{2}\end{cases}.$$

Для ВКФ $R_{21}^+(\tau)$ в соответствии с рис.п.5.е, при $0\le\tau\le\dfrac{\tau_u}{2}$ запишем

$$R_{21}^+(\tau)=\int_0^\tau s_2(t)s_1(t-\tau)dt=-\int_0^\tau\left(1-\frac{2t}{\tau_u}\right)\left(1+\frac{2(t-\tau)}{\tau_u}\right)dt=\quad;$$

$$=-r\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},0,\tau,\tau\right)=\rho\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},0,\tau\right)-\rho\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},\tau,\tau\right)$$

$$\rho\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},0,\tau\right)=\left(1-\frac{2}{\tau_u}\tau\right)0+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau_u}\frac{2}{\tau_u}\tau\right)0^2-\frac{1}{3}\frac{2}{\tau_u}\frac{2}{\tau_u}0^3=0;$$

$$\rho\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},\tau,\tau\right)=\left(1-\frac{2}{\tau_u}\tau\right)\tau+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\tau^3-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\tau^3=;$$

$$=\tau-\frac{2\tau^2}{\tau_u}+\frac{2\tau^3}{3\tau_u^2}$$

$$R_{21}^+(\tau)=-\frac{2\tau^3}{3\tau_u^2}+\frac{2\tau^2}{\tau_u}-\tau,\ 0\le\tau\le\frac{\tau_u}{2}\cdot$$

При $\dfrac{\tau_u}{2}\le\tau\le\tau_u$, в соответствии с рис.п.5.ж, ВКФ $R_{21}^+(\tau)$ определяется выражением

$$R_{21}^+(\tau)=\int_{\tau-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}}s_2(t)s_1(t-\tau)dt=-\int_{\tau-\frac{\tau_u}{2}}^{\frac{\tau_u}{2}}\left(1-\frac{2t}{\tau_u}\right)\left(1+\frac{2(t-\tau)}{\tau_u}\right)dt=\quad;$$

$$=-r\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},\tau-\frac{\tau_u}{2},\frac{\tau_u}{2},\tau\right)=\rho\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},\tau-\frac{\tau_u}{2},\tau\right)-\rho\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},\frac{\tau_u}{2},\tau\right)$$

$$\rho\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},\tau-\frac{\tau_u}{2},\tau\right)=$$

$$=\left(1-\frac{2}{\tau_u}\tau\right)\left(\tau-\frac{\tau_u}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\tau\left(\tau-\frac{\tau_u}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\left(\tau-\frac{\tau_u}{2}\right)^3=;$$

$$=\frac{2\tau^3}{3\tau_u^2}-\frac{2\tau^2}{\tau_u}+\frac{3\tau}{2}-\frac{\tau_u}{3}$$

$$\rho\left(\frac{2}{\tau_u},-\frac{2}{\tau_u},\frac{\tau_u}{2},\tau\right)=\left(1-\frac{2}{\tau_u}\tau\right)\frac{\tau_u}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\tau\left(\frac{\tau_u}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\tau_u}\right)^2\left(\frac{\tau_u}{2}\right)^3=;$$

$$=\frac{\tau_u}{3}-\frac{\tau}{2}$$

$$R_{21}^{+}(\tau)=\frac{2\tau^3}{3\tau_u^2}-\frac{2\tau^2}{\tau_u}+\frac{3\tau}{2}-\frac{\tau_u}{3}-\frac{\tau_u}{3}+\frac{\tau}{2}=.$$

$$=\frac{2\tau^3}{3\tau_u^2}-\frac{2\tau^2}{\tau_u}+2\tau-\frac{2\tau_u}{3},\;\; \frac{\tau_u}{2}\le\tau\le\tau_u$$

Выражение для ВКФ $R_{21}^{+}(\tau)$

$$R_{21}^{+}(\tau)=\begin{cases}-\dfrac{2\tau^3}{3\tau_u^2}+\dfrac{2\tau^2}{\tau_u}-\tau,\;\; 0\le\tau\le\dfrac{\tau_u}{2}\\ \dfrac{2\tau^3}{3\tau_u^2}-\dfrac{2\tau^2}{\tau_u}+2\tau-\dfrac{2\tau_u}{3},\;\; \dfrac{\tau_u}{2}\le\tau\le\tau_u\\ 0,\quad \tau>\tau_u\end{cases}.$$

АКФ заданного сигнала при $\tau\ge 0$

$$R^{+}(\tau)=2R_2^{+}(\tau)+R_{21}^{+}(\tau)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\tau^3}{3\tau_u^2}+\dfrac{2\tau^2}{\tau_u}-2\tau+\dfrac{\tau_u}{3},\;\; 0\le\tau\le\dfrac{\tau_u}{2}\\ \dfrac{2\tau^3}{3\tau_u^2}-\dfrac{2\tau^2}{\tau_u}+2\tau-\dfrac{2\tau_u}{3},\;\; \dfrac{\tau_u}{2}\le\tau\le\tau_u\\ 0,\quad \tau>\tau_u\end{cases}.$$

Выражение, описывающее АКФ заданного сигнала при любом значении τ получим симметрированием полученного выражения для $R^{+}(\tau)$

$$R(\tau)=R^{+}(|\tau|)=\begin{cases}\dfrac{2|\tau|^3}{3\tau_u^2}+\dfrac{2\tau^2}{\tau_u}-2|\tau|+\dfrac{\tau_u}{3},\ 0\le|\tau|\le\dfrac{\tau_u}{2}\\ \dfrac{2|\tau|^3}{3\tau_u^2}-\dfrac{2\tau^2}{\tau_u}+2|\tau|-\dfrac{2\tau_u}{3},\ \ \dfrac{\tau_u}{2}\le|\tau|\le\tau_u\\ 0,\quad |\tau|>\tau_u\end{cases}.$$

Пример 5. Определить спектральную плотность и АКФ сигнала рис.п.6.

На интервалах $[-1.5t_1,-t_1]$ и $[t_1,1.5t_1]$ график заданного сигнала имеет линейно-изменяющиеся участки. Поэтому спектральную плотность проще определить для его производной, которая на этих участках будет представлять собой сигнал постоянного уровня. На интервале $[-t_1,t_1]$ сигнал постоянный, поэтому его производная равна нулю. График производной заданного сигнала также показан на рис.п.6. Значение a определяется скоростью изменения линейной функции, которая равна

$$a=tg(\alpha)=1/0.5t_1=6/\tau_u,$$

где $\tau_u=3t_1$ - длительность заданного сигнала.

Запишем аналитическое выражение для производной сигнала

$$s_d(t)=a\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+t_0}{\tau_0}\right)-a\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau_0}\right),$$

где $t_0=(t_1+1.5t_1)/2=2.5t_1/2=5\tau_u/12$ – параметр сдвига;

$\tau_0 = 1.5t_1 - t_1 = 0.5t_1 = \tau_u / 6$ - длительность прямоугольных импульсов, составляющих сигнал.

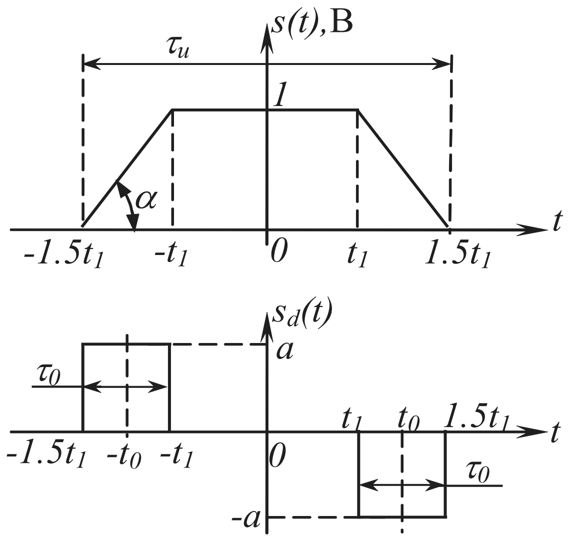

Рис.п.6. Заданный сигнал и его производная

Определим спектральную плотность $S_d(\omega)$ производной сигнала. Так как преобразование Фурье линейно, то достаточно найти спектральную плотность каждой из его аддитивных составляющих, а затем сложить результаты. Спектральная плотность симметричного прямоугольного видеоимпульса длительностью τ_0 и размахом a

$$\pm a\,\mathrm{rect}(t/\tau_0) \leftrightarrow \pm a\tau_0\,\mathrm{sinc}\,(\omega\tau_0/2).$$

С учётом свойства смещения сигнала для преобразования Фурье, запишем

$$\pm a\,\mathrm{rect}((t \pm t_0)/\tau_0) \leftrightarrow \pm a\tau_0\,\mathrm{sinc}\,(\omega\tau_0/2) e^{\pm j\omega t_0}.$$

Используя последнее выражение, получим спектральную плотность производной сигнала

$$S_d(\omega) = a\tau_0\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)e^{j\omega t_0} - a\tau_0\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)e^{-j\omega t_0} =$$
$$= 2ja\tau_0\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)\left(\frac{e^{j\omega t_0} - e^{-j\omega t_0}}{2j}\right) = 2ja\tau_0\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)\sin(\omega t_0).$$

Для определения спектральной плотности заданного сигнала воспользуемся свойством дифференцирования сигнала, согласно которому

$$S(\omega) = \frac{S_d(\omega)}{j\omega} = \frac{1}{j\omega} 2ja\tau_0\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)\sin(\omega t_0) =$$
$$= 2a\tau_0 t_0\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)\frac{\sin(\omega t_0)}{\omega t_0} = 2a\tau_0 t_0\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau_0}{2}\right)\mathrm{sinc}\,(\omega t_0).$$

Подставим выражения параметров a, τ_0 и t_0 через длительность импульса τ_u

$$S(\omega)=2\frac{6}{\tau_u}\frac{\tau_u}{6}\frac{5\tau_u}{12}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\frac{\tau_u}{6}\right)\operatorname{sinc}\left(\omega\frac{5\tau_u}{12}\right)=\frac{5\tau_u}{6}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau_u}{12}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{5\omega\tau_u}{12}\right).$$

Автокорреляционную функцию (АКФ) можно определить как обратное преобразование Фурье спектральной плотности энергии

$$W(\omega)=|S(\omega)|^2=\frac{25\tau_u^2}{36}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau_u}{12}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{5\omega\tau_u}{12}\right)=\frac{25\tau_u^2}{36}\frac{\sin^2(\omega\tau_u/12)}{(\omega\tau_u/12)^2}\frac{\sin^2(5\omega\tau_u/12)}{(5\omega\tau_u/12)^2}=$$

$$=\frac{25\tau_u^2}{36}\frac{144}{\omega^2\tau_u^2}\frac{144}{25\omega^2\tau_u^2}\sin^2\left(\frac{\omega\tau_u}{12}\right)\sin^2\left(\frac{5\omega\tau_u}{12}\right)=\frac{576}{\omega^4\tau_u^2}\sin^2\left(\frac{\omega\tau_u}{12}\right)\sin^2\left(\frac{5\omega\tau_u}{12}\right)\frac{j^4}{j^4}=$$

$$=\frac{576}{(j\omega)^4\tau_u^2}\left(\frac{e^{j\frac{\omega\tau_u}{12}}-e^{-j\frac{\omega\tau_u}{12}}}{2j}\cdot\frac{e^{5j\frac{\omega\tau_u}{12}}-e^{-j\frac{5\omega\tau_u}{12}}}{2j}\right)^2=$$

$$=\frac{36}{(j\omega)^4\tau_u^2}\left(e^{j\omega\tau_u}+e^{-j\omega\tau_u}-2e^{j\frac{5\omega\tau_u}{6}}-2e^{-j\frac{5\omega\tau_u}{6}}+e^{j\frac{2\omega\tau_u}{3}}+e^{-j\frac{2\omega\tau_u}{3}}-2e^{j\frac{\omega\tau_u}{6}}-2e^{-j\frac{\omega\tau_u}{6}}+4\right)$$

Выполним обратное преобразование Фурье. В табл.1 указано, что

$$\operatorname{sign}(t)\leftrightarrow\frac{2}{j\omega}.$$

Воспользовавшись свойством преобразования Фурье табл.1,п.4

$$s_0(t)\leftrightarrow S_0(\omega)\Rightarrow t^n s_0(t)\leftrightarrow(j)^n\frac{d^n S_0(\omega)}{d\omega^n},$$

получим

$$t^n\operatorname{sign}(t)\leftrightarrow 2(j)^{n-1}\frac{d^n}{d\omega^n}\frac{1}{\omega}=2(j)^{n-1}\frac{(-1)^n n!}{\omega^{n+1}}=j^{-2}(j)^{n+1}\frac{(-1)^n 2n!}{\omega^{n+1}}=$$

$$=j^{-2}(j)^{n+1}(j)^{n+1}\frac{(-1)^n 2n!}{(j\omega)^{n+1}}=2\frac{1}{j^2}\left(j^2\right)^{n+1}\frac{(-1)^n 2n!}{(j\omega)^{n+1}}=$$

$$=(-1)(-1)^{n+1}(-1)^n\frac{2n!}{(j\omega)^{n+1}}=(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}\frac{2n!}{(j\omega)^{n+1}}=\frac{2n!}{(j\omega)^{n+1}}$$

Поделив сигнал и спектральную плотность в последнем выражении на $2n!$, запишем

$$\frac{1}{2n!}t^n\,\mathrm{sign}(t) \leftrightarrow \frac{1}{(j\omega)^{n+1}}.$$

Определим обратное преобразование Фурье для каждого члена, входящего в выражение для $W(\omega)$, учитывая, где это необходимо, свойство смещения:

$$\frac{e^{\pm j\omega\tau_u}}{(j\omega)^4} = \left.\frac{e^{\pm j\omega\tau_u}}{(j\omega)^{n+1}}\right|_{n=3} \leftrightarrow \frac{1}{12}(\tau \pm \tau_u)^3\,\mathrm{sign}\,(\tau \pm \tau_u);$$

$$\frac{-2e^{j\frac{5\omega\tau_u}{6}}}{(j\omega)^4} = \left.\frac{-2e^{j\frac{5\omega\tau_u}{6}}}{(j\omega)^{n+1}}\right|_{n=3} \leftrightarrow -\frac{1}{6}\left(\tau \pm \frac{5\tau_u}{6}\right)^3 \mathrm{sign}\left(\tau \pm \frac{5\tau_u}{6}\right);$$

$$\frac{e^{\pm j\frac{2\omega\tau_u}{3}}}{(j\omega)^4} = \left.\frac{e^{\pm j\frac{2\omega\tau_u}{3}}}{(j\omega)^{n+1}}\right|_{n=3} = \frac{1}{12}\left(\tau \pm \frac{2\tau_u}{3}\right)^3 \mathrm{sign}\left(\tau \pm \frac{2\tau_u}{3}\right);$$

$$\frac{-2e^{\pm j\frac{\omega\tau_u}{6}}}{(j\omega)^4} = \left.\frac{-2e^{\pm j\frac{\omega\tau_u}{6}}}{(j\omega)^{n+1}}\right|_{n=3} \leftrightarrow -\frac{1}{6}\left(\tau \pm \frac{\tau_u}{6}\right)^3 \mathrm{sign}\left(\tau \pm \frac{\tau_u}{6}\right);$$

$$\frac{4}{(j\omega)^4} = \left.\frac{4}{(j\omega)^{n+1}}\right|_{n=3} \leftrightarrow \frac{1}{3}\tau^3\,\mathrm{sign}\,(\tau);$$

Найдём выражение правой ветви АКФ $R^+(\tau) = R(\tau)\big|_{\tau \ge 0}$ с учётом свойства линейности преобразования Фурье. Заметим, что при $\tau \ge 0$ выполняется равенство $\mathrm{sign}(\tau + \tau_0) = 1$ для любого $\tau_0 > 0$, тогда

$$R^+(\tau) = \frac{3}{\tau_u^2}(\tau + \tau_u)^3 + \frac{3}{\tau_u^2}(\tau - \tau_u)^3\,\mathrm{sign}\,(\tau - \tau_u) - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau + \frac{5\tau_u}{6}\right)^3 -$$
$$-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau - \frac{5\tau_u}{6}\right)^3 \mathrm{sign}\left(\tau - \frac{5\tau_u}{6}\right) + \frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau + \frac{2\tau_u}{3}\right)^3 + \frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau - \frac{2\tau_u}{3}\right)^3 \mathrm{sign}\left(\tau - \frac{2\tau_u}{3}\right) -$$
$$-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau + \frac{\tau_u}{6}\right)^3 - \frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau - \frac{\tau_u}{6}\right)^3 \mathrm{sign}\left(\tau - \frac{\tau_u}{6}\right) + \frac{12}{\tau_u^2}\tau^3$$

На интервале $0 \le \tau \le \tau_u/6$

$$R^{+}(\tau)=\frac{3}{\tau_u^2}(\tau+\tau_u)^3-\frac{3}{\tau_u^2}(\tau-\tau_u)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{5\tau_u}{6}\right)^3+\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{5\tau_u}{6}\right)^3$$

$$+\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{2\tau_u}{3}\right)^3-\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{2\tau_u}{3}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{\tau_u}{6}\right)^3+\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{\tau_u}{6}\right)^3+\frac{12}{\tau_u^2}\tau^3=$$

$$=\frac{12\tau^3}{\tau_u^2}-\frac{6\tau^2}{\tau_u}+\frac{7}{9}\tau_u$$

На интервале $\tau_u/6\le\tau\le 2\tau_u/3$

$$R^{+}(\tau)=\frac{3}{\tau_u^2}(\tau+\tau_u)^3-\frac{3}{\tau_u^2}(\tau-\tau_u)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{5\tau_u}{6}\right)^3+\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{5\tau_u}{6}\right)^3$$

$$+\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{2\tau_u}{3}\right)^3-\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{2\tau_u}{3}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{\tau_u}{6}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{\tau_u}{6}\right)^3+\frac{12}{\tau_u^2}\tau^3=$$

$$=-\tau+\frac{5}{6}\tau_u$$

На интервале $2\tau_u/3\le\tau\le 5\tau_u/6$

$$R^{+}(\tau)=\frac{3}{\tau_u^2}(\tau+\tau_u)^3-\frac{3}{\tau_u^2}(\tau-\tau_u)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{5\tau_u}{6}\right)^3+\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{5\tau_u}{6}\right)^3+$$

$$+\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{2\tau_u}{3}\right)^3+\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{2\tau_u}{3}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{\tau_u}{6}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{\tau_u}{6}\right)^3+\frac{12}{\tau_u^2}\tau^3=$$

$$=\frac{6\tau^3}{\tau_u^2}-\frac{12\tau^2}{\tau_u}+7\tau-\frac{17}{18}\tau_u$$

На интервале $5\tau_u/6\le\tau\le\tau_u$

$$R^{+}(\tau)=\frac{3}{\tau_u^2}(\tau+\tau_u)^3-\frac{3}{\tau_u^2}(\tau-\tau_u)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{5\tau_u}{6}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{5\tau_u}{6}\right)^3+$$

$$+\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{2\tau_u}{3}\right)^3+\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{2\tau_u}{3}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{\tau_u}{6}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{\tau_u}{6}\right)^3+\frac{12}{\tau_u^2}\tau^3=$$

$$=-\frac{6\tau^3}{\tau_u^2}+\frac{18\tau^2}{\tau_u}-18\tau-6\tau_u$$

На интервале $\tau\ge\tau_u$

$$R^{+}(\tau)=\frac{3}{\tau_u^2}(\tau+\tau_u)^3+\frac{3}{\tau_u^2}(\tau-\tau_u)^3\,\mathrm{sign}\,(\tau-\tau_u)-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{5\tau_u}{6}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{5\tau_u}{6}\right)^3+$$

$$+\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{2\tau_u}{3}\right)^3+\frac{3}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{2\tau_u}{3}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau+\frac{\tau_u}{6}\right)^3-\frac{6}{\tau_u^2}\left(\tau-\frac{\tau_u}{6}\right)^3+\frac{12}{\tau_u^2}\tau^3=0$$

Выражение, описывающее АКФ заданного сигнала при любом значении τ получим с учётом свойства её чётной симметрии путём симметрирования полученного выражения $R^{+}(\tau)$

$$R(\tau)=R^{+}(|\tau|)=\begin{cases}\dfrac{12|\tau|^3}{\tau_u^2}-\dfrac{6\tau^2}{\tau_u}+\dfrac{7}{9}\tau_u,\ 0\le|\tau|\le\dfrac{\tau_u}{6}\\ -|\tau|+\dfrac{5}{6}\tau_u,\ \ \dfrac{\tau_u}{6}\le|\tau|\le\dfrac{2\tau_u}{3}\\ \dfrac{6|\tau|^3}{\tau_u^2}-\dfrac{12\tau^2}{\tau_u}+7|\tau|-\dfrac{17}{18}\tau_u,\quad \dfrac{2\tau_u}{3}\le|\tau|\le\dfrac{5\tau_u}{6}\\ -\dfrac{6|\tau|^3}{\tau_u^2}+\dfrac{18\tau^2}{\tau_u}-18|\tau|-6\tau_u,\dfrac{5\tau_u}{6}\le|\tau|\le\tau_u\\ 0,\tau\ge\tau_u\end{cases}.$$