

7. Цифровые фильтры

7.1. Понятие цифрового фильтра

Цифровой фильтр (линейная дискретная система) – это алгоритм обработки дискретного сигнала, допускающий операции умножения его элементов на число, задержку на целое число тактов и сложение.

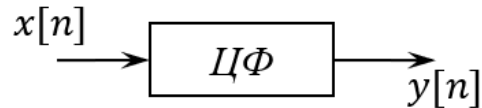


Рис.7.1. К определению цифрового фильтра

В общем случае цифровой фильтр (рис.7.1) описывается линейным разностным уравнением:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N a_k x[n-k] + \sum_{k=1}^N b_k y[n-k], \quad (7.1)$$

где $x[n]$, $y[n]$ - сигналы на входе и выходе цифрового фильтра соответственно; N - порядок цифрового фильтра; $\{a_k\}_{k=0}^N$, $\{b_k\}_{k=1}^N$ - коэффициенты цифрового фильтра.

Если заданы начальные условия

$$\begin{aligned} x[-1] &= x_{-1}; x[-2] = x_{-2}; \dots; x[-N] = x_{-N}; \\ y[-1] &= y_{-1}; y[-2] = y_{-2}; \dots; y[-N] = y_{-N}; \end{aligned}$$

то решение разностного уравнения единственно. В дальнейшем по умолчанию мы будем рассматривать нулевые начальные условия:

$$\begin{aligned} x[-1] &= 0; x[-2] = 0; \dots; x[-N] = 0; \\ y[-1] &= 0; y[-2] = 0; \dots; y[-N] = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Нулевые начальные условия для $x[n]$ означают, что мы рассматриваем воздействия на цифровой фильтр, которые отличны от нуля только при неотрицательных $n \geq 0$.

Разностные уравнения могут быть решены двумя основными методами. Метод непосредственной подстановки предполагает последовательное вычисление значений выходного сигнала при подстановке заданных значений входного сигнала и начальных условий.

Метод характеристического уравнения включает ряд этапов:

1. Составляется однородное разностное уравнение, соответствующее исходному:

$$y[n] - \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] = 0. \quad (7.3)$$

2. Составляется характеристическое уравнение

$$z^N - \sum_{k=1}^N b_k z^{N-k} = 0 \quad (7.4)$$

3. Находятся корни характеристического уравнения:

$$z_1^{(k_1)}, z_2^{(k_2)}, \dots, z_M^{(k_M)}, M \leq N,$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_M = N$ - кратности корней.

4. Записывается общее решение однородного уравнения:

$$y_{oo}[n] = \sum_{i=1}^M \sum_{m=0}^{k_i-1} C_{im} n^m \left(z_i^{(k_i)} \right)^n, \quad (7.5)$$

где C_{im} - произвольные постоянные.

5. Подбирается любое частное решение неоднородного уравнения $y_{чн}[n]$.

6. Записывается общее решение исходного уравнения

$$y_{он}[n] = y_{oo}[n] + y_{чн}[n].$$

7. Находятся постоянные C_{im} , так, чтобы полученное решение удовлетворяло заданным начальным условиям.

7.2. Принцип суперпозиции

Для цифровых фильтров выполняется принцип суперпозиции: реакция цифрового фильтра на линейную комбинацию двух сигналов при нулевых начальных условиях есть такая линейная комбинация из отдельных его реакций на каждый из сигналов.

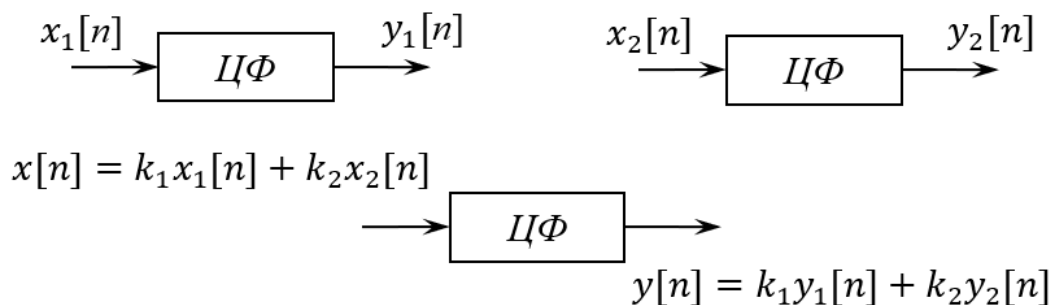


Рис.7.2. К принципу суперпозиции

Покажем это. Запишем разностные уравнения, соответствующие воздействию сигналов $x_1[n]$ и $x_2[n]$:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \sum_{k=0}^N a_k x_1[n-k] + \sum_{k=1}^N b_k y_1[n-k], \\ y_2[n] &= \sum_{k=0}^N a_k x_2[n-k] + \sum_{k=1}^N b_k y_2[n-k]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Для случая, когда на входе линейная комбинация рассматриваемых сигналов с коэффициентами k_1 и k_2 :

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^N a_k (k_1 x_1[n-k] + k_2 x_2[n-k]) + \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] = \\ &= k_1 \sum_{k=0}^N a_k x_1[n-k] + k_2 \sum_{k=0}^N a_k x_2[n-k] + \sum_{k=1}^N b_k y[n-k] \end{aligned}$$

Выражая суммы $\sum_{k=0}^N a_k x_{1,2}[n-k]$ из (7.6), получим

$$\begin{aligned} y[n] &= k_1 \left(y_1[n] - \sum_{k=1}^N b_k y_1[n-k] \right) + k_2 \left(y_2[n] - \sum_{k=1}^N b_k y_2[n-k] \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^N b_k y[n-k], \end{aligned}$$

Откуда

$$y[n] - (k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n]) = \sum_{k=1}^N b_k (y[n-k] - (k_1 y_1[n-k] + k_2 y_2[n-k])).$$

Полученное уравнение является однородным разностным уравнением относительно $y[n] - (k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n])$ с нулевыми начальными условиями. Оно имеет единственное решение и нетрудно убедиться, что это решение нулевое, то есть $y[n] = k_1 y_1[n] + k_2 y_2[n]$.

7.3. Оператор и временные характеристики цифровых фильтров

Выполнение принципа суперпозиции позволяет считать, что цифровой фильтр реализует некоторый линейный оператор

$$y[n] = T \{x[n]\},$$

причём $T \{k_1 x_1[n] + k_2 x_2[n]\} = k_1 T \{x_1[n]\} + k_2 T \{x_2[n]\}$.

Представив формально сигнал на входе цифрового фильтра в виде $x[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$ для сигнала на выходе запишем:

$$y[n] = T \{x[n]\} = T \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] \delta[n-k] \right\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] T \{ \delta[n-k] \}.$$

Обозначим

$$h[n] = T \{ \delta[n] \}, \quad (7.7)$$

тогда для сигнала на выходе получим

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} x[n-k] h[k] = x * h[n]. \quad (7.8)$$

Введённая (7.7) последовательность называется импульсной характеристикой цифрового фильтра и представляет собой результат преобразования цифровым фильтром единичного отсчёта при нулевых начальных условиях (рис.7.3).

Сигнал на выходе цифрового фильтра является свёрткой сигнала на входе и импульсной характеристики, а оператор цифрового фильтра $T \{ \bullet \}$ является оператором дискретной свёртки.



Рис.7.3. К определению импульсной и переходной характеристик

Реакция цифрового фильтра на дискретный единичный скачок называется переходной характеристикой

$$g[n] = T \{ \sigma[n] \}. \quad (7.9)$$

Так как $\sigma[n] = \sum_{k=0}^n \delta[k]$, то

$$g[n] = \sum_{k=0}^n h[k] \quad (7.10)$$

Импульсная и переходная характеристики являются временными характеристиками цифровых фильтров. Они определяются как реакции на воздействия, имеющие место не ранее момента

дискретного времени $n = 0$, поэтому, ввиду принципа причинности, не должны отличаться от нуля при отрицательных $n < 0$:

$$\begin{aligned} h[n] \Big|_{n < 0} &= 0, \\ g[n] \Big|_{n < 0} &= 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Условия (7.11) называются условиями физической реализуемости цифрового фильтра.

7.4. Классификация и схемы цифровых фильтров

Краткая классификация цифровых фильтров представлена на рис.7.4.

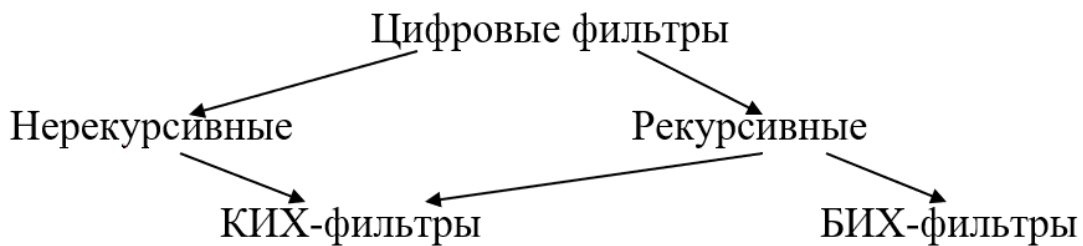


Рис.7.4. Классификация цифровых фильтров

Нерекурсивным называется цифровой фильтр, в котором значения дискретного сигнала на выходе зависят только от значений дискретного сигнала на входе. Нерекурсивный цифровой фильтр описывается неполным разностным уравнением вида:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N a_k x[n-k]. \quad (7.12)$$

Рекурсивным называется цифровой фильтр, в котором значения дискретного сигнала на выходе зависят как от значений дискретного сигнала на входе, так и от предшествующих значений дискретного сигнала на выходе. Рекурсивный цифровой фильтр описывается полным разностным уравнением (7.1).

Наглядное изображение алгоритма преобразования входного дискретного сигнала в выходной называют схемой цифрового фильтра. Схемы нерекурсивного и рекурсивного цифровых фильтров, соответствующие (7.12) и (7.1) показаны на рис.7.5. Треугольником обозначены ветви с умножением на коэффициент, подписанный сверху. Прямоугольник, отмеченный символом T , обозначает элемент памяти, в котором запоминается текущее значение сигнала и из которого оно извлекается на следующем такте.

Такой элемент может рассматриваться как цифровой фильтр, задерживающий сигнал на один такт и потому имеющий системную функцию z^{-1} , поэтому иногда внутри прямоугольников пишут не « T », а « z^{-1} ». Окружностью со значком « Σ » обозначен сумматор.

КИХ-фильтром или фильтром с конечной импульсной характеристикой называется такой цифровой фильтр, все элементы импульсной характеристики которого начиная с некоторого номера равны нулю, то есть существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такой что $h[n] \Big|_{n > n_0} = 0$.

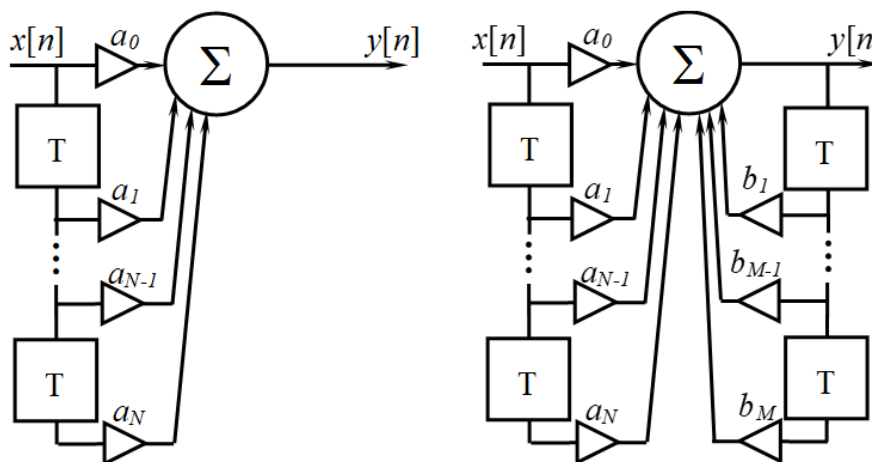


Рис.7.5. Схемы нерекурсивного и рекурсивного цифровых фильтров

Цифровые фильтры, не обладающие указанным свойством, называются БИХ-фильтрами или цифровыми фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой.

Нерекурсивный цифровой фильтр всегда является КИХ-фильтром, более того элементы его импульсной характеристики совпадают с элементами последовательности его коэффициентов:

$$h[n] = a_n, \quad n = 0, \dots, N. \quad (7.13)$$

Убедиться в справедливости (7.13) можно, решая разностное уравнение нерекурсивного фильтра методом непосредственной подстановки при воздействии единичного отсчёта.

7.5. Принцип транспозиции

Для цифровых фильтров с постоянными коэффициентами и убывающей импульсной характеристикой выполняется принцип транспозиции: при воздействии на цифровой фильтр дискретного

гармонического сигнала со временем устанавливается такой стационарный режим, в котором реакция цифрового фильтра также является гармонической с частотой, равной частоте воздействия.

Покажем это. Пусть в момент времени $n = 0$ на вход цифрового фильтра воздействует дискретный гармонический сигнал

$$x[n] = \sigma[n]X \cos(\omega nT + \varphi_X) = \sigma[n] \operatorname{Re} \dot{X} e^{j\omega nT},$$

где $\dot{X} = X e^{j\varphi_X}$ - комплексная амплитуда.

Рассмотрим сигнал на выходе при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]\sigma[n-k] \operatorname{Re} \dot{X} e^{j\omega(n-k)T} = \\ &= \operatorname{Re} \dot{X} \sum_{k=0}^n h[k] e^{-j\omega kT} e^{j\omega nT}. \end{aligned}$$

Имея в виду убывание импульсной характеристики в последнем выражении можем положить

$$\sum_{k=0}^n h[k] e^{-j\omega kT} \Big|_{n \rightarrow \infty} = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] e^{-j\omega kT} = H_d(\omega), \quad (7.14)$$

тогда

$$y[n] = \operatorname{Re} \dot{X} H_d(\omega) e^{j\omega nT} = Y \cos(\omega nT + \varphi_Y),$$

где $\dot{Y} = Y e^{j\varphi_Y}$ - комплексная амплитуда гармонического сигнала на выходе, такая, что

$$\dot{Y} = H_d(\omega) \dot{X} \quad (7.15)$$

7.6. Частотные характеристики цифровых фильтров

Комплексной частотной характеристикой (КЧХ) $H_d(\omega)$ цифрового фильтра называется зависимость от частоты отношения комплексной амплитуды выходного дискретного гармонического сигнала к комплексной амплитуде входного дискретного гармонического сигнала в стационарном режиме. КЧХ определена (7.15)

$$H_d(\omega) = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}}, \quad (7.16)$$

и, как видно, из (7.14) является спектральной функцией для импульсной характеристики $h_d(t)$.

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) $|H_d(\omega)|$

цифрового фильтра называется зависимость от частоты отношения амплитуды выходного дискретного гармонического сигнала к амплитуде входного дискретного гармонического сигнала в стационарном режиме:

$$|H_d(\omega)| = \frac{Y}{X} \quad (7.17)$$

Фазочастотной характеристикой (ФЧХ) $\varphi_{H_d}(\omega)$ цифрового фильтра называется зависимость от частоты разности начальных фаз выходного и входного дискретных гармонических сигналов в стационарном режиме

$$\varphi_{H_d}(\omega) = \varphi_Y(\omega) - \varphi_X(\omega) = \arg H_d(\omega). \quad (7.18)$$

Частотные характеристики цифрового фильтра являются периодическими функциями частоты с периодом ω_d , однако, их чаще всего бывает удобно рассматривать как 2π -периодические функции нормированной частоты ωT .

7.7. Системная функция цифрового фильтра

Рассмотрим Z – преобразование от левой и правой частей разностного уравнения (7.1) цифрового фильтра при нулевых начальных условиях с учётом свойств линейности и запаздывания:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^N a_k X(z)z^{-k} + \sum_{k=1}^N b_k Y(z)z^{-k},$$

откуда

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}. \quad (7.19)$$

Отношение изображения сигнала на выходе цифрового фильтра к изображению сигнала на его входе при нулевых начальных условиях не зависит от вида сигнала на входе и определяется только коэффициентами цифрового фильтра. Это отношение называется системной функцией (СФ) цифрового фильтра $H(z)$.

Рассматривая в качестве воздействия единичный отсчёт,

найдем $X(z) = 1$, $Y(z) = Z\{h[n]\}$ и получим, что импульсная характеристика и системная функция цифрового фильтра являются парой Z -преобразований:

$$H(z) = Z\{h[n]\}. \quad (7.20)$$

Имея в виду взаимосвязь между спектральной функцией дискретного сигнала и его Z -преобразованием (5.16), найдем представление комплексной частотной характеристики через системную функцию цифрового фильтра:

$$H_d(\omega) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T}} = H(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega T}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k e^{-jk\omega T}}. \quad (7.21)$$

Формула (7.21) также выражает комплексную частотную характеристику через коэффициенты фильтра. Запись $H(e^{j\omega T})$ иногда используется для обозначения комплексной частотной характеристики.

7.8. Методы анализа преобразования сигналов цифровыми фильтрами

В задаче анализа преобразования сигналов цифровыми фильтрами известен сигнал на входе $x[n]$, структура цифрового фильтра и его коэффициенты (что однозначно определяет характеристики цифрового фильтра). Воздействие на цифровой фильтр имеет место не ранее $n = 0$ при нулевых начальных условиях. Требуется найти сигнал на выходе цифрового фильтра $y[n]$.

Задача анализа может быть решена различными методами. Рассмотрим основные из них:

1. Составление и решение разностного уравнения.
2. Метод наложения. Сигнал на входе цифрового фильтра представляется в виде линейной комбинации сигналов, реакции на которые известны или могут быть легко определены. Решение задачи анализа записывается с учётом принципа суперпозиции. В случае, когда выбор вспомогательных сигналов затруднён используется универсальное представление сигнала на входе в виде линейной комбинации запаздывающих единичных отсчётов и на выходе

имеем (7.8).

3. Операторный метод. Находится изображение сигнала на входе и записывается системная функция цифрового фильтра. Изображение сигнала на выходе находится как произведение:

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (7.22)$$

Для нахождения сигнала на выходе следует обратить $Y(z)$.

4. Спектральный метод. Спектральная плотность дискретного сигнала на выходе находится как произведение спектральной плотности сигнала на входе и комплексной частотной характеристики цифрового фильтра:

$$Y_d(\omega) = H_d(\omega)X_d(\omega) \quad (7.23)$$

Поиск общего выражения для дискретного сигнала на выходе через $Y_d(\omega)$ может оказаться затруднительным, однако (7.23) будет полезным, когда сигнал на выходе должен быть описан своей спектральной функцией.

7.9. Последовательная и параллельная цифровая фильтрация

В ряде задач возникает необходимость рассматривать последовательное применение процедур цифровой фильтрации ЦФ1 и ЦФ2 на рис.7.6, как одну единую процедуру. Найдём характеристики результирующего цифрового фильтра.

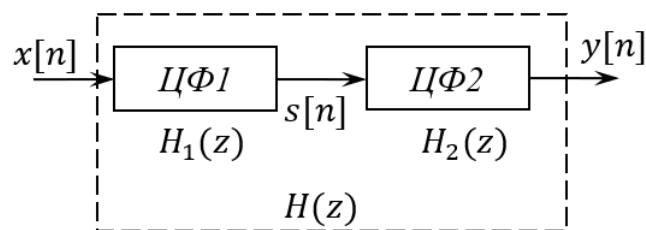


Рис.7.6. Последовательная цифровая фильтрация

Операторным методом получим изображение сигнала на выходе ЦФ1 и на входе ЦФ2:

$$S(z) = X(z)H_1(z),$$

Тогда для изображения сигнала на выходе ЦФ2 запишем:

$$Y(z) = S(z)H_2(z) = X(z)H_1(z)H_2(z).$$

С другой стороны, он же и на выходе результирующего фильтра

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

откуда

$$H(z) = H_1(z)H_2(z). \quad (7.24)$$

Системные функции при последовательной цифровой фильтрации перемножаются.

Учитывая взаимосвязь комплексной частотной характеристики и системной функции, получим:

$$H_d(\omega) = H_{d1}(\omega)H_{d2}(\omega). \quad (7.25)$$

Учитывая взаимосвязь между импульсной характеристикой и системной функцией, а также теорему о свёртке для Z – преобразования, найдём:

$$h[n] = h_1 * h_2[n]. \quad (7.26)$$

Полученные формулы показывают, что при замене очередности процедур последовательной фильтрации результирующие характеристики не изменяются, то есть и сами процедуры можно выполнять в любой последовательности получая при этом один и того же результат.

При параллельной цифровой фильтрации (рис.7.7) входной сигнал подаётся на два цифровых фильтра ЦФ1 и ЦФ2, сигналы $y_{1,2}[n]$ с выхода которых складываются:

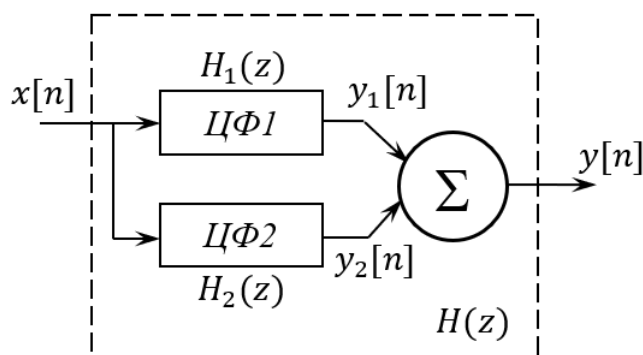


Рис.7.7. Параллельная цифровая фильтрация

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n],$$

откуда для результирующих характеристик получим:

$$\begin{aligned} h[n] &= h_1[n] + h_2[n], \\ H(z) &= H_1(z) + H_2(z), \\ H_d(\omega) &= H_{d1}(\omega) + H_{d2}(\omega). \end{aligned} \quad (7.27)$$

7.10. Каноническая схема цифрового фильтра

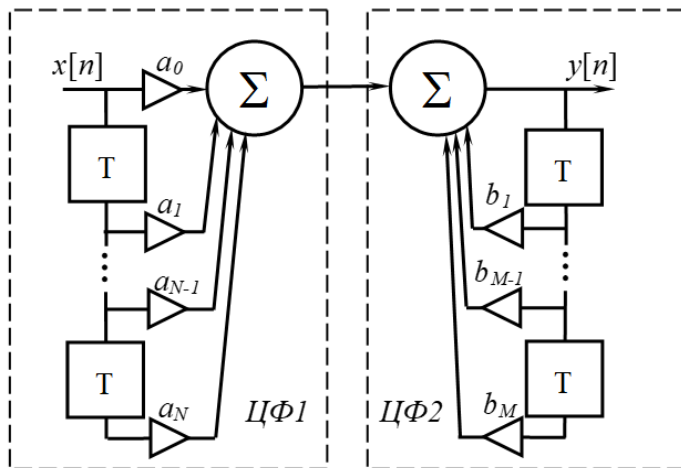


Рис.7.8. Выделение последовательных звеньев

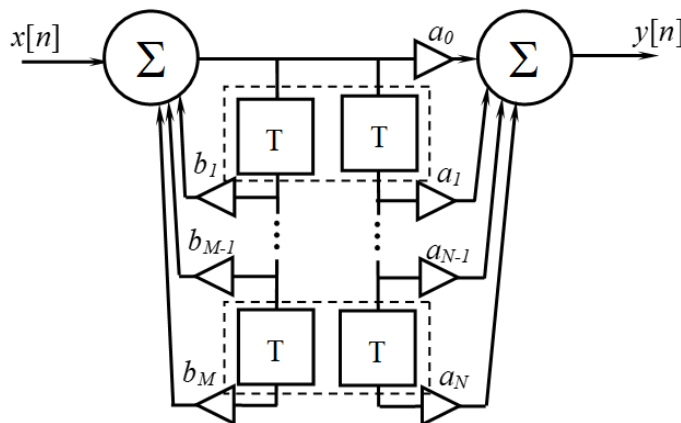


Рис.7.9. Перестановка звеньев

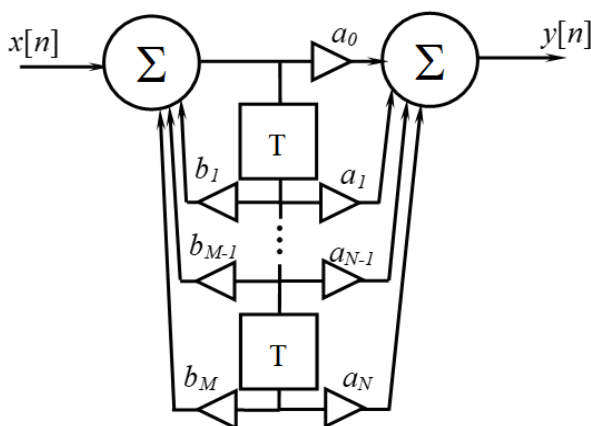


Рис.7.10 Каноническая схема цифрового фильтра

Перерисуем схему цифрового фильтра рис.7.5 в виде, показанном на рис.7.8. При этом формально можно выделить два последовательных звена ЦФ1 и ЦФ2. Изменим порядок последовательной фильтрации и придём к схеме, показанной на рис.7.9. В элементах задержки, объединённых пунктирными прямоугольниками, хранятся одинаковые числа, однако, нет никакой необходимости дублировать данные, поэтому эти элементы можно заменить одним, что и сделано на рис.7.10. Полученная схема называется канонической схемой цифрового фильтра и оказывается эффективной при его программной реализации, поскольку позволяет экономно использовать память, требуя в два раза меньший её объём, чем в прямой схеме рис. 7.5.

Пример текста программы на С++ для реализации цифрового фильтра порядка не более 100 по канонической схеме приведён на лист.7.1.

*Листинг 7.1. Текст программы для реализации цифрового фильтра
(используется синтаксис С++)*

```
//Описание класса ЦФ
class CDigatalFilter
{
public:
    // переменные
    int N; // порядок ЦФ
    double Line[110]; // линия задержки
    double a[110];
    double b[110]; // коэффициенты ЦФ
    // методы класса
    void ClearLine(void); // установка нулевых нну
    void InLine(double x); // ввод элемента в линию
    double Out(double x); // сигнал на выходе ЦФ
    CDigatalFilter(void); // конструктор
};

// конструктор
CDigitalFilter::CDigatalFilter(void)
{
    N=100;
    ClearLine();
    for(int i=0; i<=N; i++)
    {a[i]=0.0; b[i]=0.0;}
    a[0]=1.0;
}

// установка нулевых нну
CDigitalFilter::ClearLine(void)
{
    for(int i=0; i<N; i++)
        Line[i]=0.0;
}

// ввод элемента в линию задержки
CDigitalFilter::InLine(double x)
{
    for(int i=N-1; i>0; i--)
        Line[i]=Line[i-1];
    Line[0]=x;
}

// сигнал на выходе фильтра
CDigitalFilter::InLine(double x)
{
```

```
double LeftSum=x; // левый сумматор
for(int i=1; i<=N; i++)
  LeftSum += b[i]*Line[i-1];
double RightSum = a[0]*LeftSum; // правый сумматор
for(int i=1; i<=N; i++)
  RightSum += a[i]*Line[i-1];
InLine(LeftSum); // подготовка к следующему такту
Return RightSum; // результат
}
```

Пример использования класса лист.7.1 для программирования цифрового фильтра 2-го порядка с коэффициентами $a_0 = 0,5$; $b_1 = 0,6$; $b_2 = -0,2$ показан на лист.7.2.

Листинг 7.2. Текст программы реализации цифрового фильтра второго порядка (используется синтаксис C++)

```
double InSignal[1010]; // массив значений сигнала на входе
double OutSignal[1010]; // массив значений сигнала на выходе
CDigitalFilter Filter; // объект цифрового фильтра
```

...

```
void SomeFunction(void)
{
  // инициализация фильтра
  Filter.N=2;
  Filter.a[0]=1; Filter.a[1]=0.5;
  Filter.b[1]=0.6; Filter.b[2]=-0.2;
  // установка нулевых нну
  Filter.ClearLine();
  // собственно цифровая фильтрация
  for(int n=0; n<1000; n++)
    OutSignal[n]=Filter.Out(InSignal[n]);
}
```

7.11. Представление цифрового фильтра в виде последовательного соединения элементарных звеньев

Перепишем выражение для системной функции (7.19) следующим образом:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \underbrace{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}_{H_{\text{нер}}} \cdot \frac{1}{\underbrace{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}_{H_p}} = H_{\text{нер}}(z) H_p(z).$$

Как видно, цифровой фильтр можно представить в виде последовательного соединения нерекурсивного и чисто рекурсивного цифровых фильтров с системными функциями $H_{\text{нер}}(z)$ и $H_{\text{р}}(z)$ соответственно.

Рассмотрим системную функцию рекурсивного цифрового фильтра:

$$H_{\text{р}}(z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{z^N}{z^N - b_1 z^{N-1} - b_2 z^{N-2} - \dots - b_N}.$$

Рассмотрим многочлен в знаменателе

$$p(z) = z^N - b_1 z^{N-1} - b_2 z^{N-2} - \dots - b_N.$$

Это многочлен с действительными коэффициентами и может иметь действительные и комплексные корни, при этом каждому комплексному корню соответствует комплексно-сопряжённый. Выпишем корни этого многочлена так, что каждый корень будет выписан столько раз сколько этого потребует его кратность:

$$\underbrace{z_1, z_2, z_3, \dots}_{\text{действительные корни}} \dots \underbrace{z_k, z_k^*, z_{k+1}, z_{k+1}^* \dots z_M, z_M^*}_{\text{комплексные корни}}, \quad M < N.$$

Тогда рассматриваемый многочлен может быть представлен в виде

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_k)(z - z_k^*) \dots (z - z_M)(z - z_M^*).$$

Преобразуем каждую пару сомножителей, соответствующую комплексно-сопряжённым корням, следующим образом:

$$(z - z_k)(z - z_k^*) = z^2 - 2z \operatorname{Re} z_k + |z_k|^2,$$

Тогда системную функцию рекурсивного фильтра можно представить в виде:

$$\begin{aligned} H_{\text{р}}(z) &= \frac{z}{z - z_1} \frac{z}{z - z_2} \dots \frac{z^2}{z^2 - 2z \operatorname{Re} z_k + |z_k|^2} \dots \\ &\dots \frac{z^2}{z^2 - 2z \operatorname{Re} z_M + |z_M|^2} = \\ &= \frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} \frac{1}{1 - z_2 z^{-1}} \dots \frac{1}{1 - 2z^{-1} \operatorname{Re} z_k + z^{-2} |z_k|^2} \dots \end{aligned}$$

$$= \underbrace{H_1^{(1)}(z)H_2^{(1)}(z) \dots H_k^{(2)}(z) \dots H_M^{(2)}(z)}_{\text{звенья 1-го порядка}} \dots \frac{1}{1 - 2z^{-1} \operatorname{Re} z_M + z^{-2} |z_M|^2} =$$

где $H_i^{(1)}(z) = \frac{1}{1 - z_i z^{-1}}$, $i = 1, \dots, k - 1$ - системные функции, описывающие звенья - цифровые фильтры первого порядка;

звенья - цифровые фильтры первого порядка;

$H_i^{(2)}(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1} \operatorname{Re} z_i + z^{-2} |z_i|^2}$, $i = k, \dots, M$ - системные функции, описывающие звенья - цифровые фильтры второго порядка.

Для исходного цифрового фильтра теперь можем записать:

$$H(z) = \underbrace{H_{\text{нер}}(z)}_{\text{ЦФ}} \underbrace{H_1^{(1)}(z)H_2^{(1)}(z) \dots H_k^{(2)}(z) \dots H_M^{(2)}(z)}_{\text{звенья 1-го порядка}} \underbrace{\dots}_{\text{звенья 2-го порядка}}, \quad (7.28)$$

то есть любой цифровой фильтр с действительными коэффициентами можно представить в виде последовательного соединения нерекурсивного цифрового фильтра с системной функцией $H_{\text{нер}}(z)$, чисто рекурсивных звеньев 1-го порядка с системными функциями $H_i^{(1)}(z)$, $i = 1, \dots, k - 1$ и чисто рекурсивных звеньев второго порядка с системными функциями $H_i^{(2)}(z)$, $i = k, \dots, M$. При этом все полюсы системной функции исходного цифрового фильтра являются полюсами системных функций его элементарных звеньев и наоборот. Системные функции элементарных звеньев первого порядка имеют один полюс. Системные функции элементарных звеньев второго порядка имеют два комплексно-сопряжённых полюса.

7.12. Устойчивость цифровых фильтров

Дискретный сигнал $\{x[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ называется ограниченным, если существует действительное положительное число $M_x > 0$ превосходящее абсолютные значения всех элементов сигнала, то есть $|x[n]| \leq M_x$, $n \in \mathbb{Z}$.

Цифровой фильтр называется устойчивым, если его реакция

на ограниченный дискретный сигнал ограничена.

Поскольку единичный отсчёт является ограниченной последовательностью, то импульсная характеристика устойчивого цифрового фильтра ограничена.

Рассмотрим реакцию устойчивого цифрового фильтра на некоторый ограниченный дискретный сигнал, учтём, что модуль суммы всегда меньше суммы модулей

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} x[n-k]h[k] \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x[n-k]| |h[k]|.$$

В последней сумме заменим каждое значение $|x[n-k]|$ заведомо большим M_x , тогда

$$|y[n]| \leq M_x \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|.$$

Наконец, поскольку реакция устойчивого цифрового фильтра на ограниченный дискретный сигнал ограничена, получим

$$|y[n]| \leq M_x \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| \leq M_y,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| \leq \frac{M_y}{M_x} < \infty. \quad (7.29)$$

Таким образом, ряд, составленный из элементов импульсной характеристики устойчивого цифрового фильтра сходится абсолютно. При этом (в виду необходимого условия сходимости числового ряда) сама импульсная характеристика является убывающей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h[n] = 0. \quad (7.30)$$

Для устойчивого цифрового фильтра выполняется принцип транспозиции.

Анализ устойчивости цифрового фильтра сводится к анализу сходимости числового ряда, что не всегда удобно. Представив цифровой фильтр в виде последовательного соединения элементарных звеньев (см.п.7.11), установим, что цифровой фильтр является устойчивым, если каждое его звено устойчиво, поскольку при

этом ограниченному воздействию будет соответствовать ограниченный отклик каждого звена.

Нерекурсивный цифровой фильтр всегда устойчив, так как является КИХ-фильтром, а ряд по значениям импульсной характеристики – конечной суммой.

Ниже (в п.7.13-7.14) будет показано, что цифровой фильтр первого или второго порядка устойчив, когда полюсы его системной функции находятся внутри единичной окружности z -плоскости. Но полюсы системных функций звеньев совпадают с полюсами системной функции исходного цифрового фильтра, поэтому условием устойчивости является расположение всех полюсов системной функции внутри единичной окружности, иначе

$$\left| z_{\text{полюс}} \right|_{\text{СФ}} < 1. \quad (7.31)$$

При наличии только одного полюса системной функции на единичной окружности, цифровой фильтр называется условно-устойчивым. У такого цифрового фильтра реакция на убывающее воздействие ограничена.

Неустойчивость цифровых фильтров приводит к переполнению разрядной сетки вычислителя, алгоритм обработки сигналов становится нелинейным, может давать результаты трудно предсказуемые на этапе проектирования.

7.13. Цифровой фильтр первого порядка

Системная функция цифрового фильтра первого порядка записывается в виде:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}}. \quad (7.32)$$

Частотные характеристики

$$H_d(\omega) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega T}}{1 - b_1 e^{-j\omega T}}, \quad (7.33)$$

$$H_d(\omega) = \sqrt{\frac{a_0^2 + 2a_0 a_1 \cos(\omega T) + a_1^2}{1 - 2b_1 \cos(\omega T) + b_1^2}}, \quad (7.34)$$

$$\varphi_{H_d}(\omega) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \operatorname{sign} \left(\frac{a_0 - a_1 b_1 + (a_1 - a_0 b_1) \cos(\omega T)}{1 - 2b_1 \cos(\omega T) + b_1^2} \right) \right) \times \quad (7.35)$$

$$\times \operatorname{sign}(\omega T) + \operatorname{arctg} \left(\frac{(a_1 - a_0 b_1) \sin(\omega T)}{a_0 - a_1 b_1 + (a_1 - a_0 b_1) \cos(\omega T)} \right).$$

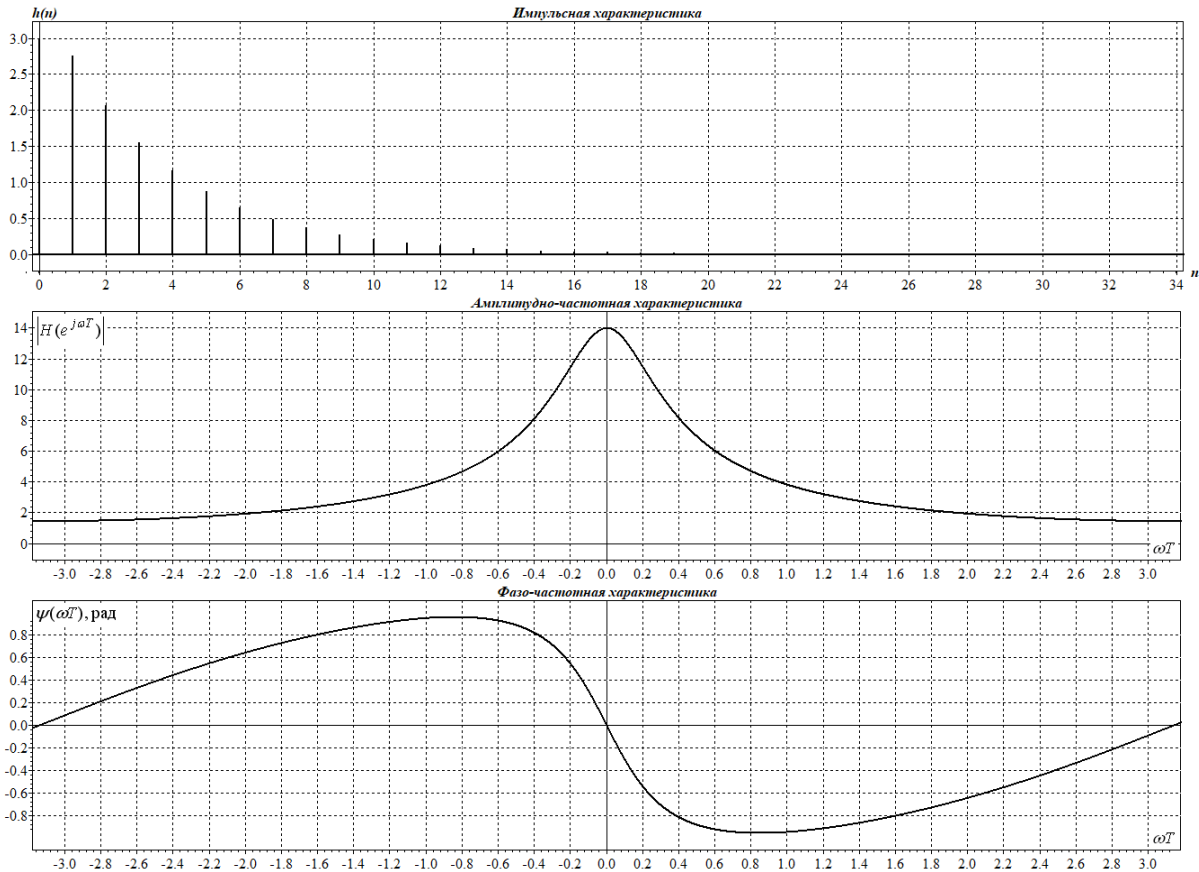


Рис.7.11. Пример характеристик цифрового фильтра первого порядка при $C > 0$, $a_0 > C$, $0 < b_1 < 1$

Импульсную характеристику фильтра найдём как обратное Z-преобразование его системной функции с учётом свойств линейности и запаздывания, а также (4.25) :

$$h[n] = Z^{-1} \{ H(z) \} = Z^{-1} \left\{ \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1}} \right\} +$$

$$+ Z^{-1} \left\{ \frac{a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1}} \right\} = a_0 \sigma[n] b_1^n + a_1 \sigma[n-1] b_1^{n-1} =$$

$$= a_0 \delta[n] + a_0 b_1 \sigma[n-1] b_1^{n-1} + a_1 \sigma[n-1] b_1^{n-1} =$$

$$= a_0\delta[n] + (a_0b_1 + a_1)\sigma[n-1]b_1^{n-1}.$$

Обозначив $C = a_0b_1 + a_1$, для импульсной характеристики запишем

$$h[n] = a_0\delta[n] + C\sigma[n-1]b_1^{n-1}. \quad (7.36)$$

Примеры основных характеристик цифровых фильтров первого порядка приведены на рис.7.11 – 7.13.

Для исследования устойчивости цифрового фильтра следует проверить сходимость ряда (7.29). Используем для этого признак д'Аламбера в предельной форме. Найдём

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{h[n+1]}{h[n]} \right| = \left| \frac{Cb_1^n}{Cb_1^{n-1}} \right| = |b_1|.$$

Для сходимости ряда требуется, чтобы $r = |b_1| < 1$.

Заметим, что точка $z = b_1$ является полюсом системной функции цифрового фильтра первого порядка, следовательно, цифровой фильтр устойчив, если полюс его системной функции находится внутри единичной окружности.

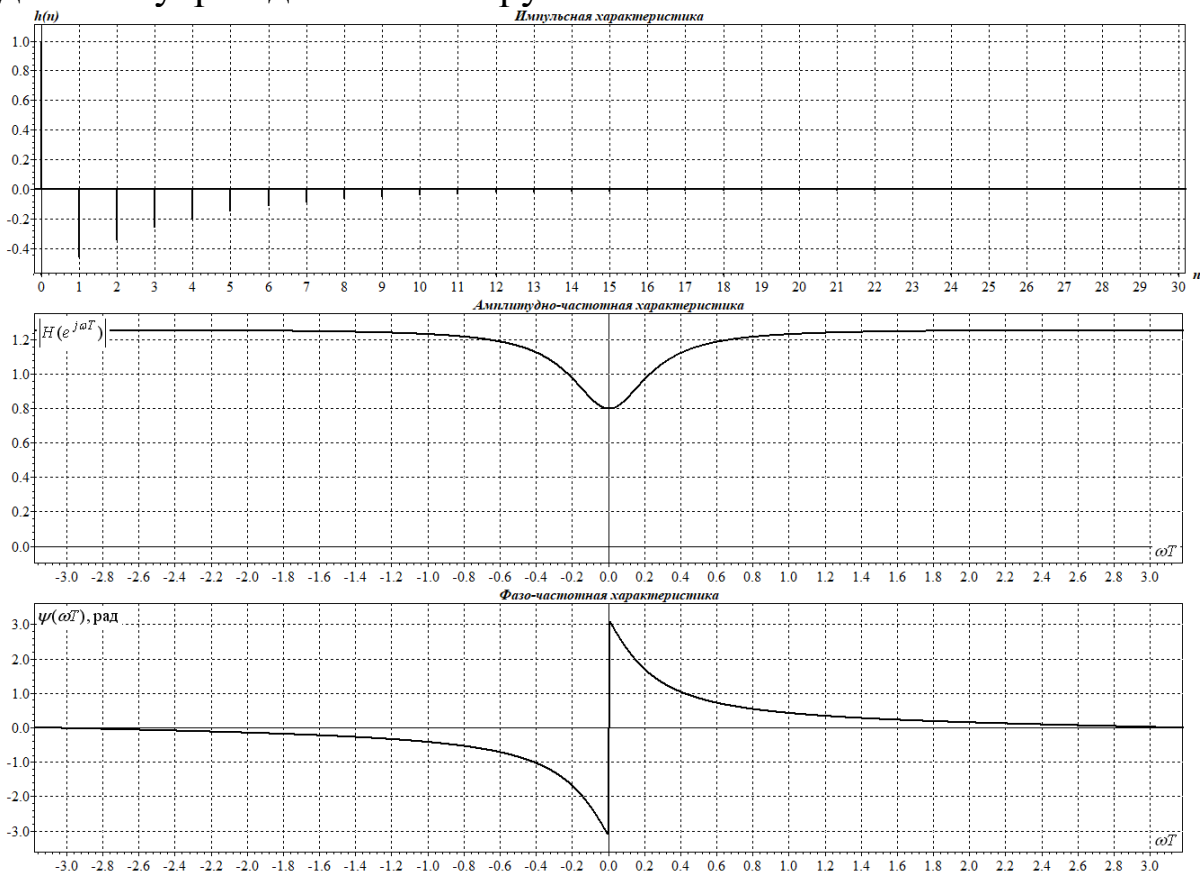


Рис.7.12. Пример характеристик цифрового фильтра первого порядка при $C < 0$, $0 < b_1 < 1$.

Для переходной характеристики цифрового фильтра первого порядка найдём:

$$\begin{aligned}
 g[n] &= \sum_{k=0}^n h[k] = \sum_{k=0}^n \left(a_0 \delta[k] + C \sigma[k-1] b_1^{k-1} \right) = \\
 &= a_0 \sum_{k=0}^n \delta[k] + C \sum_{k=0}^n \sigma[k-1] b_1^{k-1} = a_0 \sigma[n] + C \sigma[n-1] \underbrace{\sum_{k=1}^n b_1^{k-1}}_{\substack{\text{сумма } n \\ \text{членов г.п.}}} = \\
 &= a_0 \sigma[n] + C \sigma[n-1] \frac{1-b_1^n}{1-b_1} = a_0 \delta[n] + \sigma[n-1] \left(a_0 + C \frac{1-b_1^n}{1-b_1} \right) = \\
 &= \sigma[n] \left(a_0 + C \frac{1-b_1^n}{1-b_1} \right).
 \end{aligned}$$

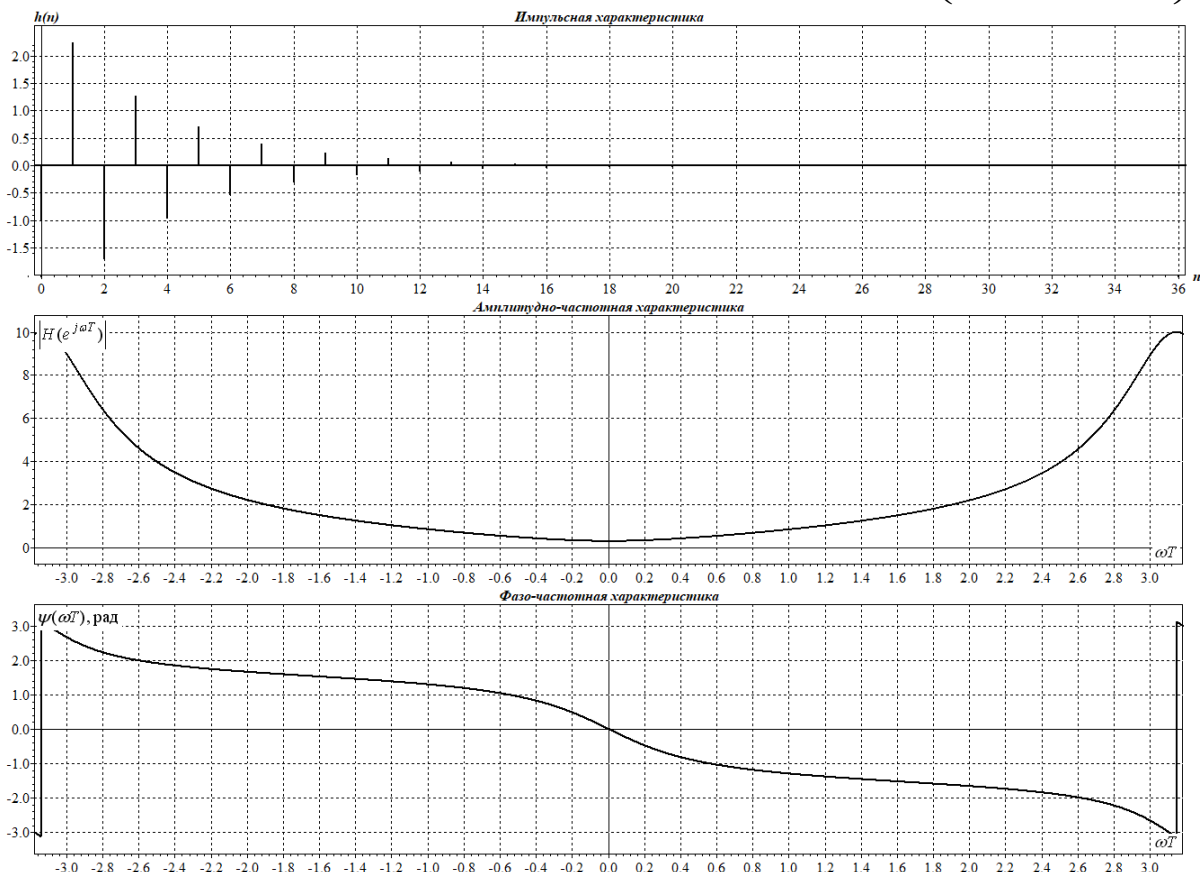


Рис.7.13. Пример характеристик цифрового фильтра первого порядка при $C > 0$, $-1 < b_1 < 0$.

Переходя в скобках к общему знаменателю, переходную характеристику приведём к окончательному виду:

$$g[n] = \sigma[n] \left(\frac{a_0 + a_1}{1 - b_1} - \frac{C}{1 - b_1} b_1^n \right). \quad (7.37)$$

7.14. Цифровой фильтр второго порядка

Системная функция цифрового фильтра второго порядка имеет вид:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \\ &= \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} + \frac{a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} + \frac{a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \\ &= a_0 H_p^{(2)}(z) + a_1 z^{-1} H_p^{(2)}(z) + a_2 z^{-2} H_p^{(2)}(z), \end{aligned} \quad (7.38)$$

где $H_p^{(2)}(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - b_1 z - b_2}$ - системная функция

чисто рекурсивного цифрового фильтра второго порядка.

Взяв обратное Z-преобразование для импульсной характеристики запишем:

$$h[n] = a_0 h_p^{(2)}[n] + a_1 h_p^{(2)}[n-1] + a_2 h_p^{(2)}[n-2]. \quad (7.39)$$

Таким образом, импульсная характеристика цифрового фильтра второго порядка выражается через импульсную характеристику чисто рекурсивного цифрового фильтра второго порядка. Поэтому, и имея в виду громоздкость общих выражений, будем рассматривать только чисто рекурсивный цифровой фильтр.

Найдём полюсы системной функции $H_p^{(2)}(z)$, решая уравнение

$$z^2 - b_1 z - b_2 = 0. \quad (7.40)$$

Поскольку коэффициенты b_1 и b_2 действительны, возможны три случая: уравнение имеет два различных действительных корня, уравнение имеет один действительный корень кратности два, уравнение имеет два комплексно-сопряжённых корня.

В случае, когда уравнение имеет два различных действительных корня $z_{п1,2} \in \mathbb{R}$, имеем $z_{п1,2} = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4b_2}}{2}$; $b_1^2 + 4b_2 > 0$;

$$b_1 = z_{\pi 1} + z_{\pi 2}; \quad b_2 = -z_{\pi 1} z_{\pi 2}.$$

Для системной функции получим

$$H_p^{(2)}(z) = \frac{z^2}{(z - z_{\pi 1})(z - z_{\pi 2})} = \frac{1}{1 - z_{\pi 1} z^{-1}} \frac{1}{1 - z_{\pi 2} z^{-1}}.$$

Соответствующий цифровой фильтр можно рассматривать как последовательное соединение цифровых фильтров первого порядка. Условием устойчивости является расположение полюсов внутри единичной окружности, то есть $|z_{\pi 1,2}| < 1$.

Импульсную характеристику найдём как обратное Z – преобразование:

$$\begin{aligned} h_p^{(2)}[n] &= Z^{-1} \left\{ H_p^{(2)}(z) \right\} = \\ &= \sigma[n] \left(\operatorname{res}_{z_{\pi 1}} \left(H_p^{(2)}(z) z^{n-1} \right) + \operatorname{res}_{z_{\pi 2}} \left(H_p^{(2)}(z) z^{n-1} \right) \right) = \\ &= \sigma[n] \left(\left. \frac{z^2 z^{n-1} \cancel{(z - z_{\pi 1})}}{\cancel{(z - z_{\pi 1})} (z - z_{\pi 2})} \right|_{z=z_{\pi 1}} + \left. \frac{z^2 z^{n-1} \cancel{(z - z_{\pi 2})}}{(z - z_{\pi 1}) \cancel{(z - z_{\pi 2})}} \right|_{z=z_{\pi 2}} \right) = \quad (7.41) \\ &= \sigma[n] \frac{z_{\pi 1}^{n+1} - z_{\pi 2}^{n+1}}{z_{\pi 1} - z_{\pi 2}}. \end{aligned}$$

В случае, когда уравнение (7.40) имеет один корень $z_{\pi} \in \mathbb{R}$ кратности два имеем: $z_{\pi} = \frac{b_1}{2}$; $b_1^2 + 4b_2 = 0$; $b_1 = 2z_{\pi}$; $b_2 = -z_{\pi}^2$ и

$$H_p^{(2)}(z) = \frac{z^2}{(z - z_{\pi})^2} = \frac{1}{1 - z_{\pi} z^{-1}} \frac{1}{1 - z_{\pi} z^{-1}}.$$

Соответствующий цифровой фильтр можно рассматривать как последовательное соединение двух одинаковых цифровых фильтров первого порядка. Для устойчивости этих цифровых фильтров требуется $|z_{\pi}| < 1$.

Импульсную характеристику найдём как обратное Z-преобразование:

$$h_p^{(2)}[n] = Z^{-1} \left\{ H_p^{(2)}(z) \right\} = \sigma[n] \operatorname{res}_{z_{\pi}} \left(H_p^{(2)}(z) z^{n-1} \right) =$$

$$= \sigma[n] \frac{d}{dz} \frac{z^2 z^{n-1}}{(z - z_{\Pi})^2} \Big|_{z=z_{\Pi}} = \sigma[n] \frac{d}{dz} z^{n+1} \Big|_{z=z_{\Pi}} = \sigma[n](n+1)z_{\Pi}^n.$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (7.40) имеет два комплексно-сопряжённых корня $z_{\Pi} = z_{\Pi 1} = z_{\Pi 2}^* \in \mathbb{C}$;

$$z_{\Pi 1,2} = \frac{b_1 \pm j\sqrt{|b_1^2 + 4b_2|}}{2}; \quad b_1^2 + 4b_2 < 0; \quad b_1 = 2\operatorname{Re} z_{\Pi}; \quad b_2 = -|z_{\Pi}|^2.$$

Обозначим $z_{\Pi} = re^{j\omega_0 T}$, тогда $b_1 = 2r \cos(\omega_0 T)$ и $b_2 = -r^2$.

Импульсная характеристика фильтра найдётся в виде (7.41) и может быть преобразована с учётом специфики рассматриваемого случая следующим образом:

$$h_p^{(2)}[n] = \sigma[n] \frac{z_{\Pi 1}^{n+1} - z_{\Pi 2}^{n+1}}{z_{\Pi 1} - z_{\Pi 2}} = \sigma[n] \frac{r^{n+1} e^{j(n+1)\omega_0 T} - r^{n+1} e^{-j(n+1)\omega_0 T}}{r e^{j\omega_0 T} - r e^{-j\omega_0 T}} = \sigma[n] r^n \frac{\sin((n+1)\omega_0 T)}{\sin(\omega_0 T)}.$$

Обозначив $C = \frac{1}{\sin(\omega_0 T)}$, $\varphi_0 = \omega_0 T$, выражение для импульсной характеристики приведём к виду:

$$h_p^{(2)}[n] = \sigma[n] C r^n \sin(\omega_0 n T + \varphi_0). \quad (7.42)$$

В рассматриваемом случае импульсная характеристика имеет вид дискретных осцилляций, затухающих при $r < 1$ по показательному закону. Модуль полюсов r определяет скорость затухание, а аргумент $\varphi_0 = \omega_0 T$ - частоту и начальную фазу квазиколебаний.

Для исследования устойчивости составим ряд из элементов импульсной характеристики:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| r^n \sin(\omega_0 n T + \varphi_0) \right|.$$

Этот ряд почленно мажорируется рядом $\sum_{n=0}^{+\infty} |r^n|$, который сходится абсолютно при $r < 1$. Таким образом, полюсы системной функции

у устойчивого цифрового фильтра второго порядка располагаются внутри единичной окружности.

Пример характеристик чисто рекурсивного цифрового фильтра второго порядка с комплексно-сопряжёнными полюсами системной функции приведён на рис.7.14 при $r = 0,9$; $\omega_0 T = \frac{\pi}{2}$.

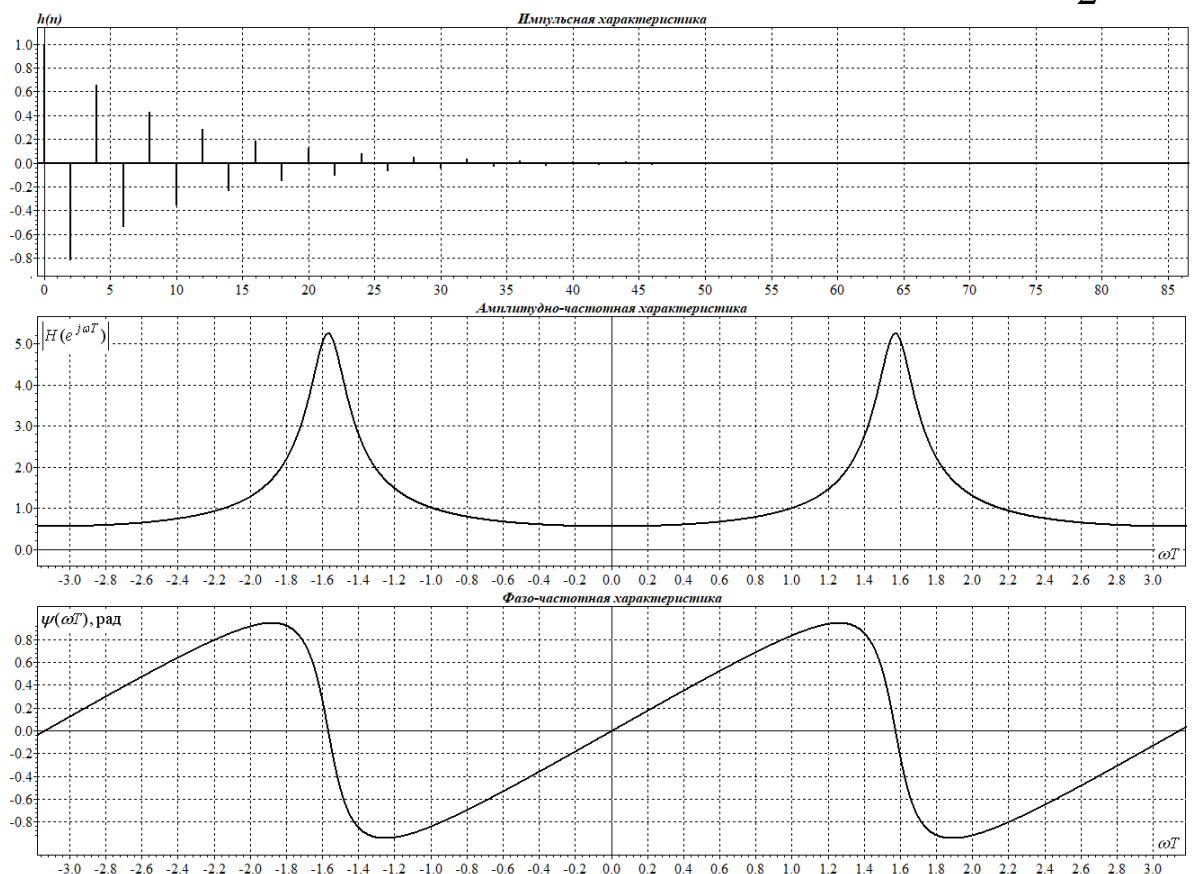


Рис.7.14. Пример характеристик чисто рекурсивного цифрового фильтра второго порядка