

6. Восстановление (интерполяция) аналоговых сигналов по их дискретным значениям

6.1. Постановка задачи восстановления сигналов

Базовой теоретической моделью при цифровой обработке сигналов являются сигналы с ограниченным спектром, поскольку именно для таких сигналов дискретизация и восстановление потенциально могут быть выполнены точно.

Процедура восстановления сигнала с ограниченным спектром определяется рядом Котельникова (3.4). Однако практическая реализация этой процедуры затруднена, поскольку, из-за неограниченности во времени функций Котельникова, для определения любого значения $s(t)$, $t \neq nT$, требуется располагать всеми отсчётами сигнала $\{s(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и выполнить бесконечно большое количество операций умножения и сложения. Это обуславливает поиск приближённых решений задачи восстановления сигналов, предполагающих простую физическую реализацию.

Восстановление аналоговых сигналов в математическом плане сводится к задаче интерполяции, то есть нахождения такой функции $\psi(t)$, называемой интерполирующей, которая в моменты дискретизации $t_n = nT$, $n \in \mathbb{Z}$ принимает значения, совпадающие с значениями сигнала, а в остальные моменты времени описывает восстанавливаемый сигнал с той или иной степенью точности.

Решение задачи интерполяции неоднозначно. Классификация методов интерполяции представлена на рис.6.1.

Интерполяция на основе ряда Котельникова является линейной, глобальной, регулярной и изотропной. Перечисленные признаки желательно сохранить и при поиске приближённых решений задачи интерполяции, полагая, что они обусловлены неотъемлемыми свойствами сигналов с ограниченным спектром. Однако только глобальность интерполяции рядом Котельникова обуславливает принципиальные трудности при физической реализации. Поэтому приближённые решения задачи восстановления сигналов обычно рассматривают в классе линейных, локальных, регулярных и изотропных методов.

При переходе к приближённому решению задачи восстановления сигнала с ограниченным спектром, единственность решения

понимается асимптотически и выражается наложением условия сходимости интерполяционного процесса, которое гарантирует, что рано или поздно увеличение информации о восстанавливаемом сигнале приведёт к его более точному восстановлению. Требуемая точность восстановления сигнала, при выполнении условия сходимости, может быть достигнута предварительным выбором периода дискретизации.

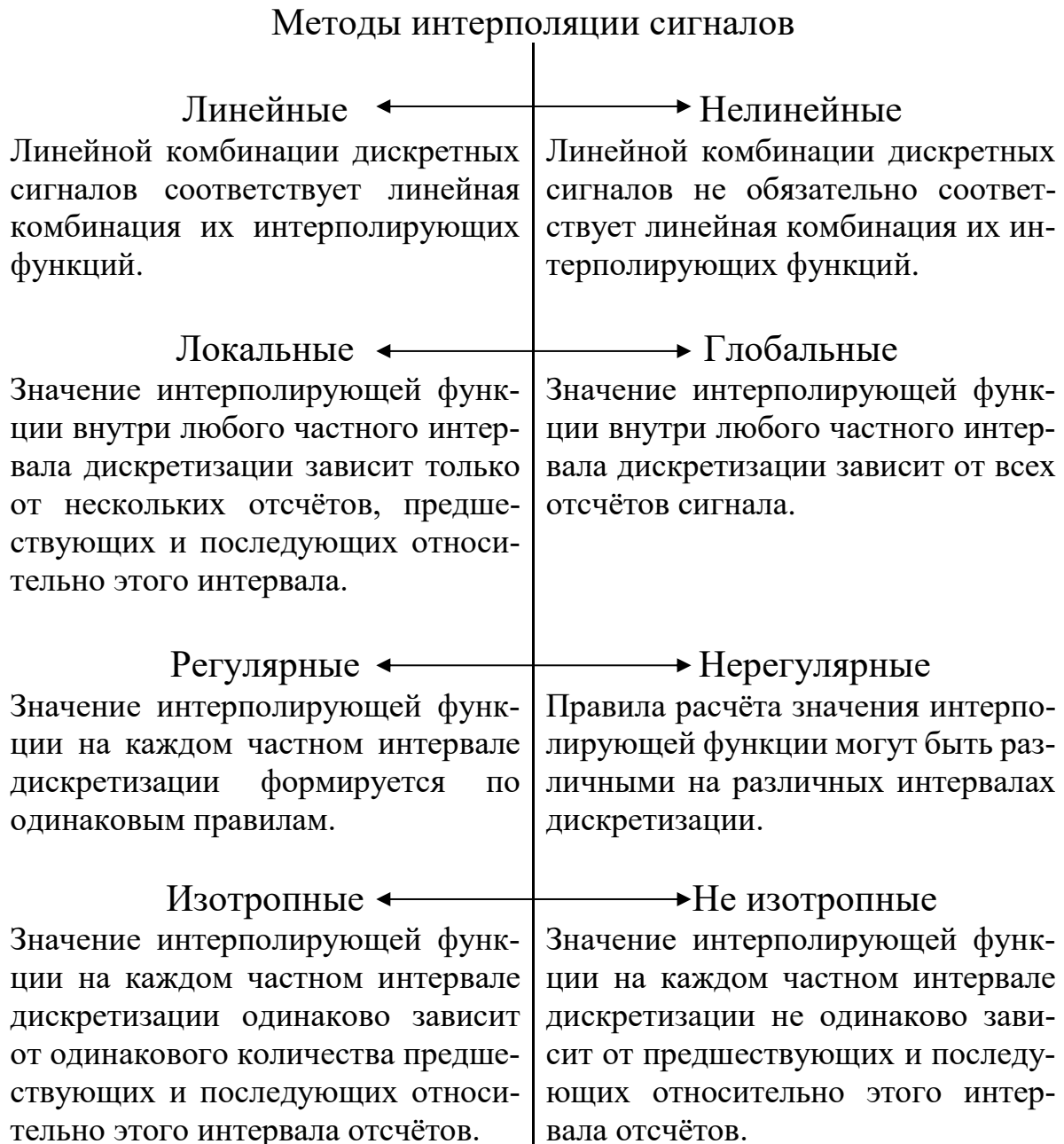


Рис.6.1. Классификация методов интерполяции

6.2. Линейная регулярная интерполяция сигналов

6.2.1. Интерполяционный оператор и его основные свойства, интерполяционный базис

Регулярная интерполяция может рассматриваться только на бесконечной равномерной сетке дискретизации $t_n = nT$, $n \in \mathbb{Z}$. Переход от последовательности $\{s(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ к интерполирующей функции $\psi(t)$ можно рассматривать как отображение множества дискретных сигналов на множество аналоговых сигналов:

$$\psi(t) = I \{s(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty} \quad (6.1)$$

Интерполяционный оператор $I\{\bullet\}$ обладает свойствами:

1. Линейность

$$I \{k_1 s_1(nT) + k_2 s_2(nT)\} = k_1 I \{s_1(nT)\} + k_2 I \{s_2(nT)\}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{C}. \quad (6.2)$$

2. Согласованность

$$\psi(nT) = s(nT), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6.3)$$

3. Сходимость

$$\lim_{T \rightarrow 0} \psi(t) = s(t). \quad (6.4)$$

Дискретный сигнал можно представить в виде:

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta[n-k]. \quad (6.5)$$

С учётом свойства линейности (6.2)

$$\psi(t) = I \{s(nT)\} = I \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \delta[n-k] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) I \{ \delta[n-k] \}.$$

Введём обозначение

$$\varphi_k(t) = I \{ \delta[n-k] \}, \quad (6.6)$$

тогда выражение для интерполирующей функции можно переписать в виде:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT) \varphi_k(t). \quad (6.7)$$

Функция $\varphi_k(t)$ называется базисной функцией и представляет собой результат восстановления единичного отсчёта, соответствующего k -му моменту дискретизации, методом $I\{\bullet\}$ (см. ри.6.2).

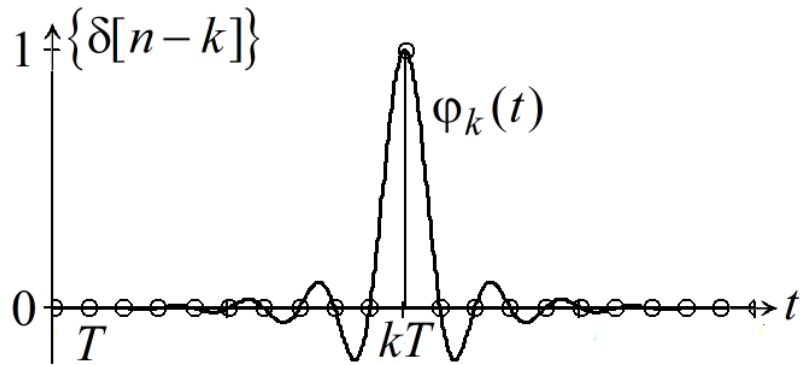


Рис.6.2. Базисная функция

Совокупность базисных функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ называется интерполяционным базисом.

Базисная функция, как частный случай интерполирующей, обладает свойством согласованности:

$$\varphi_k(nT) = \delta[n - k]. \quad (6.8)$$

Графики базисных функций регулярного метода интерполяции имеют одинаковую форму, а сами базисные функции могут быть получены из базисной функции $\varphi_0(t)$, соответствующей нулевому моменту времени, путём её сдвигов на целое число периодов дискретизации:

$$\varphi_k(t) = \varphi_0(t - kT). \quad (6.9)$$

Базисная функция $\varphi_0(t)$ называется порождающей функцией, в том смысле, что совокупность её сдвигов на целое число периодов дискретизации порождает интерполяционный базис. Свойство (6.8) для порождающей функции переписывается как

$$\varphi_0(nT) = \delta[n]. \quad (6.10)$$

С учётом (6.9) интерполирующую функцию (6.7) приведём к виду:

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\varphi_0(t - nT) \quad (6.11)$$

В случае, локального метода интерполяции значения интерполирующей функции внутри некоторого частного интервала $t \in [t_k, t_{k+1}]$ зависят от его граничных узлов (t_k, s_k) и (t_{k+1}, s_{k+1}) , а также от M_1 предшествующих и M_2 последующих узлов интерполяции. При этом выражение (6.11) переписывается следующим образом:

$$\psi(t)|_{t \in [t_k, t_{k+1}]} = \sum_{m=-M_1}^{M_2+1} s_{k+m} \varphi_0(t - t_{k+m}), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.11a)$$

Порождающая функция изотропного метода интерполяции обладает чётной симметрией

$$\varphi_0(t) = \varphi_0(-t). \quad (6.12)$$

6.2.2. Условие сходимости регулярного метода интерполяции

Рассмотрим простейший случай восстановления единицы $s(t) = 1$ и $s(nT) = 1, n \in \mathbb{Z}$. Такой сигнал может быть корректно дискретизирован при любом выборе периода дискретизации. Интерполирующая функция (6.11) в этом случае запишется в виде:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t - nT) \quad (6.13)$$

Выражение (6.13) можно рассматривать как результат периодизации, непериодической функции $\varphi_0(t)$, с периодом повторения T , что позволяет выполнить разложение в ряд Фурье в комплексной форме:

$$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_0\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{j\frac{2\pi k}{T}t}, \quad (6.14)$$

где $\Phi_0(\omega) = F\{\varphi_0(t)\}$ - спектральная плотность порождающей функции.

Изменение периода дискретизации при восстановлении единицы можно рассматривать как масштабирование, то есть интерполирующая функция в этом случае может быть представлена в виде

$$\psi(t) = \psi_0\left(\frac{t}{T}\right),$$

где $\psi_0(t)$ - интерполирующая функция, соответствующая единичному периоду дискретизации, является периодической с единичным периодом, то есть

$$\psi_0(t) = \psi_0(t + n).$$

Если $\psi(t)$ не является постоянной, то найдутся такие две точки $t_a, t_b \in [0, 1]$, что $\psi_0(t_a) \neq \psi_0(t_b)$, и предела при неограниченном уменьшении периода дискретизации не существует, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \psi(t) &= \lim_{T \rightarrow 0} \psi_0\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_0\left(\frac{t}{t/(t_a + n)}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_0(t_a + n) = \psi_0(t_a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \psi(t) &= \lim_{T \rightarrow 0} \psi_0\left(\frac{t}{T}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_0\left(\frac{t}{t/(t_b + n)}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_0(t_b + n) = \psi_0(t_b). \end{aligned}$$

Таким образом, если $\psi(t)$ не постоянна при некотором T , то она не трансформируется в постоянную и при его неограниченном уменьшении.

Следовательно, для метода интерполяции, обладающего свойством сходимости, интерполирующая функция, построенная для единицы, независимо от периода дискретизации, постоянна и равна единице. Тогда из (6.14), ввиду единственности разложения в ряд Фурье, следует, что сходимость интерполяционного процесса при восстановлении единицы имеет место при выполнении любого из эквивалентных условий:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t - nT) = 1 \Leftrightarrow \Phi_0\left(\frac{2\pi k}{T}\right) = \begin{cases} T, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

или

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t - nT) = 1 \Leftrightarrow \Phi_0(k\omega_d) = T\delta[k]. \quad (6.15)$$

Покажем теперь, что при выполнении условий восстановления единицы (6.15) имеет место и сходимость интерполяционного процесса для любого сигнала с ограниченным спектром.

Рассмотрим преобразование Фурье интерполирующей функции (6.11) и с учётом свойств линейности и временного запаздывания для спектральной плотности интерполирующей функции запишем:

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= F\{\psi(t)\} = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)\varphi_0(t - nT)\right\} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)F\{\varphi_0(t - nT)\} = \Phi_0(\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT)e^{-j\omega nT} = \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$= \Phi_0(\omega)S_d(\omega).$$

Подставляя спектр дискретного сигнала в виде (2.8), последнее выражение перепишем как:

$$\Psi(\omega) = \Phi_0(\omega) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(\omega - k\omega_d) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\omega) S(\omega - k\omega_d).$$

При предельном переходе $T \rightarrow 0$ происходит локализация порождающей функции, что приводит к растяжению по оси частот её спектральной плотности (рис.6.3), но ширина спектра сигнала $2\omega_m$ не изменяется, поэтому можно считать, что

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \Psi(\omega) &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\omega) S(\omega - k\omega_d) = \\ &= \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_0(k\omega_d) S(\omega - k\omega_d), \end{aligned}$$

откуда, при выполнении (6.15), имеем $\lim_{T \rightarrow 0} \Psi(\omega) = S(\omega)$ или

$$\lim_{T \rightarrow 0} \psi(t) = s(t).$$

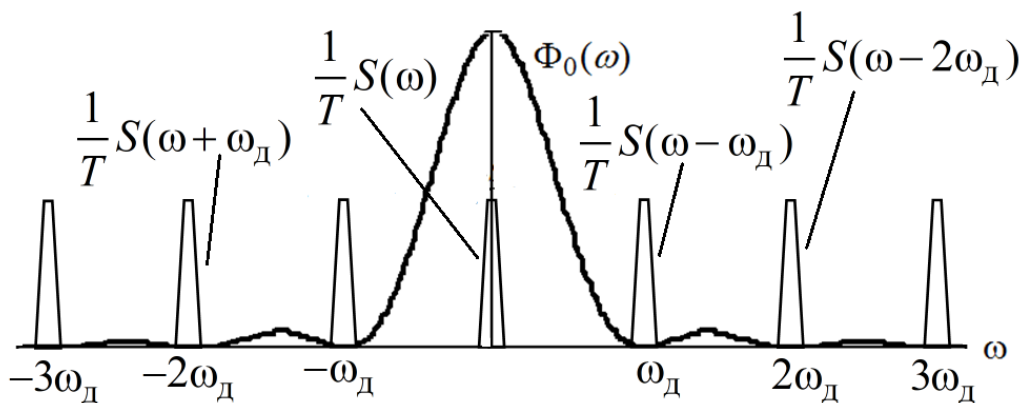


Рис.6.3. Спектральная плотность порождающей функции и спектр дискретного сигнала

Поскольку фурье-пара $\varphi_0(t) \leftrightarrow \Phi_0(\omega)$ обладает свойствами (6.10) и (6.15), то имеют место нормировки

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t) dt &= T, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_0(\omega) d\omega &= 2\pi. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Более того, класс фурье-пар, удовлетворяющих (6.10) и (6.15)

замкнут относительно преобразования Фурье. Действительно, рассматривая в качестве временной функции $\tilde{\varphi}_0(t) = \frac{1}{T} \Phi_0\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, заметим, что она удовлетворяет (6.10), а её спектральная плотность, ввиду свойства симметрии преобразования Фурье, описывается выражением $\tilde{\Phi}_0(\omega) = T\varphi_0\left(-\frac{T^2\omega}{2\pi}\right)$ и удовлетворяет (6.15). Таким образом, спектральная плотность порождающей функции некоторого регулярного интерполяционного базиса при надлежащем масштабировании сама является порождающей функцией регулярного интерполяционного базиса. При этом интерполяция в обоих указанных базисах обладает свойством сходимости.

6.2.3. Оценка искажений при регулярной интерполяции

Из (6.16) видно, что спектральная плотность интерполирующей функции $\Psi(\omega)$ представляет собой результат выделения спектра исходного сигнала $S(\omega)$ из спектра дискретного сигнала $S_d(\omega)$ путём умножения на спектральную плотность порождающей функции $\Phi_0(\omega)$ (рис. 6.4).

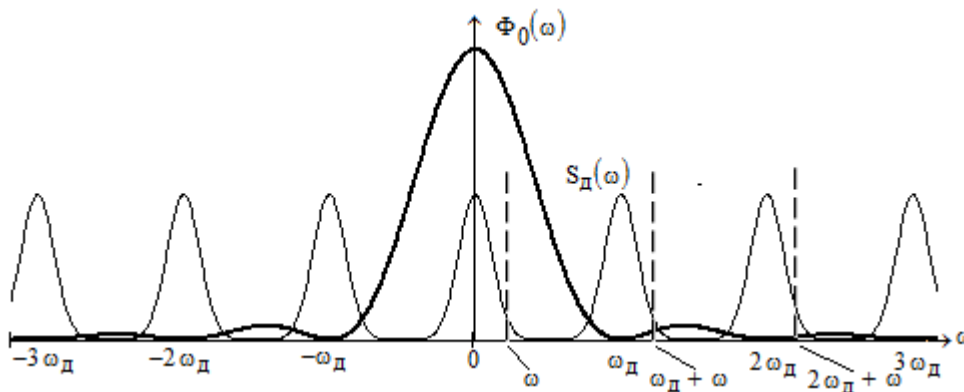


Рис.6.4. Спектр дискретного сигнала и спектральная плотность порождающей функции

Точным такое выделение являлось бы в случае, когда $\Phi_0(\omega)$ представляет собой прямоугольную функцию, что при локальной интерполяции исключено, поскольку, ввиду ограниченности во времени порождающей функции $\varphi_0(t)$, её спектральная плотность

$\Phi_0(\omega)$ является аналитической функцией и, не будучи тождественным нулём, не может обращаться в нуль ни на каком конечном интервале.

Имея это в виду, интерполирующую функцию $\psi(t)$, при условии $\omega_d > 2\omega_m$, можно формально рассматривать как результат искажений исходного сигнала $s(t)$, при которых для каждой гармоники сигнала частоты ω , независимо от других, происходит изменение её амплитуды (умножается на $\Phi_0(\omega)$) и наложение на сигнал колебаний частот $k\omega_d + \omega$, $k = 0, 1, 2, \dots$ с амплитудами, пропорциональными $\Phi_0(k\omega_d + \omega)$. Поскольку при этом комбинационного взаимодействия между гармониками сигнала не происходит, минимизацию искажений можно осуществлять отдельно для каждой гармоники.

Искажения отдельной гармонической составляющей сигнала будем характеризовать коэффициентом искажений, определяемым как отношение действующего значения совокупности нежелательных гармоник, возникших при интерполяции, к средней мощности восстанавливаемой гармоники. При этом, рассматривая только такую интерполяцию, при которой обеспечивается сходимость, то есть с учётом (6.15) $\Phi_0(0) = T$, выражение для коэффициента искажений запишем следующим образом:

$$K_{\text{и}}(\omega) = \frac{1}{T} \sqrt{(T - \Phi_0(\omega))^2 + \Phi_0^2(\omega_d + \omega) + \Phi_0^2(2\omega_d + \omega) + \dots} \quad (6.18)$$

При практических расчётах, может быть учтено только конечное число нежелательных гармоник:

$$K_{\text{и}}^N(\omega) = \frac{1}{T} \sqrt{(T - \Phi_0(\omega))^2 + \Phi_0^2(\omega_d + \omega) + \dots + \Phi_0^2(N\omega_d + \omega)} \quad (6.19)$$

В виду того, что изменение периода дискретизации соответствует масштабированию спектральной плотности порождающей функции по горизонтальной и вертикальной координатным осям, коэффициент искажений удобно рассматривать как функцию нормированной частоты ωT . График коэффициента искажений в зависимости от нормированной частоты не изменяется при изменении периода дискретизации.

Пороговый анализ зависимости $K_{\text{и}}(\omega)$ может быть положен в основу определения требуемого значения частоты дискретизации и/или выбора метода интерполяции при заданном уровне искажений (см. рис. 6.5). Выбор допустимого уровня искажений $K_{\text{и.доп}}$ определяется спецификой решаемой задачи и определяет нормированную граничную частоту $(\omega T)_{\text{гр}}$ для метода интерполяции, такую что $K_{\text{и}}(\omega T \leq (\omega T)_{\text{гр}}) \leq K_{\text{и.доп}}$. Нормированная граничная частота не зависит от периода дискретизации. Для восстановления сигнала с максимальной частотой спектра ω_m с заданным уровнем искажений требуется обеспечить $\omega_m T \leq (\omega T)_{\text{гр}}$, при этом каждая гармоника сигнала частоты ω восстанавливается с $K_{\text{и}}(\omega) \leq K_{\text{и.доп}}$.

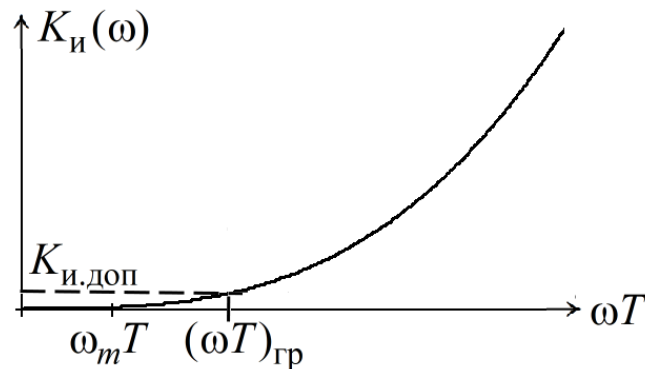


Рис.6.5. Пример графика коэффициента искажений

Обычно приемлемые значения допустимого коэффициента искажений зависят от специфики конкретной решаемой задачи и выбираются в диапазоне $K_{\text{и.доп}} \leq 10^{-2}$ (меньше -40дБ). Чем меньше выбран допустимый коэффициент искажений, тем меньше окажется и граничная частота.

6.3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Рассматриваемый метод интерполяции не является регулярным, однако мы обратим на него внимание, поскольку на нём основаны подходы к построению локальных регулярных методов.

Интерполяция многочленом Лагранжа рассматривается на конечном интервале $t \in [\tau_0, \tau_{N-1}]$, на котором задана последовательность N моментов дискретизации $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}$. В общем

случае интерполяция многочленом Лагранжа может рассматриваться на неравномерных сетках дискретизации. Мы будем рассматривать частный случай, когда сетка дискретизации равномерна с шагом T и $\tau_n = \tau_0 + nT$, $n = 0, \dots, N-1$.

Интерполяционный многочлен Лагранжа представляет собой многочлен

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k t^k,$$

степени $N-1$, коэффициенты которого выбираются так, чтобы его график проходил через узлы интерполяции (τ_n, s_n) , $n = 0, \dots, N-1$, что имеет место, если

$$\psi(\tau_n) = s_n, n = 0, \dots, N-1,$$

или

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \tau_n^k = s_n, n = 0, \dots, N-1. \quad (6.20)$$

Записанное выражение (6.20) является системой линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов интерполяционного многочлена Лагранжа. Главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \tau_0 & \tau_0^2 & \dots & \tau_0^{N-1} \\ 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \dots & \tau_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \tau_{N-1} & \tau_{N-1}^2 & \dots & \tau_{N-1}^{N-1} \end{vmatrix} \quad (6.21)$$

представляет собой определитель Вандермонда и отличен от нуля, при условии, что абсциссы всех узлов интерполяции различны, что обязательно имеет место на равномерной сетке дискретизации.

Покажем, что Лагранжева интерполяция обладает свойством линейности. Рассмотрим интерполяцию двух сигналов $s_1(\tau_n)$ и $s_2(\tau_n)$ на одной и той же сетке $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{N-1}$. Построим для них интерполяционные многочлены Лагранжа

$$\psi_1(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(1)} t^k; \quad \psi_2(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(2)} t^k, \quad (6.22)$$

определяя их коэффициенты решением систем линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(1)} \tau_n^k = s_1(\tau_n), \quad n = 0, \dots, N-1; \quad (6.23)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k^{(2)} \tau_n^k = s_2(\tau_n), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (6.24)$$

Образует линейную комбинацию рассматриваемых дискретных сигналов

$$s(\tau_n) = k_1 s_1(\tau_n) + k_2 s_2(\tau_n)$$

и построим для неё интерполяционный многочлен:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k t^k,$$

Коэффициенты которого найдутся решением системы

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \tau_n^k = k_1 s_1(\tau_n) + k_2 s_2(\tau_n), \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (6.25)$$

Подставим (6.22) в (6.25):

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \tau_n^k = \sum_{k=0}^{N-1} (k_1 a_k^{(1)} + k_2 a_k^{(2)}) \tau_n^k, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

или

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[a_k - (k_1 a_k^{(1)} + k_2 a_k^{(2)}) \right] \tau_n^k = 0, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (6.26)$$

Поскольку система линейных алгебраических уравнений (6.26) однородна и её главный определитель (6.21) отличен от нуля, она имеет единственное нулевое решение, то есть

$$a_k = k_1 a_k^{(1)} + k_2 a_k^{(2)}, \quad k = 0, \dots, N-1,$$

откуда и следует выполнение условия линейности:

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k t^k = \sum_{k=0}^{N-1} (k_1 a_k^{(1)} + k_2 a_k^{(2)}) t^k = k_1 \psi_1(t) + k_2 \psi_2(t) \quad (6.27)$$

Как показано в п.6.2.1, при выполнении условия линейности интерполирующую функцию можно представить в виде

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s(\tau_k) \varphi_k(t). \quad (6.28)$$

Каждая базисная функция интерполяционного многочлена

Лагранжа $\varphi_k(t)$, $k = 0, \dots, N-1$, будучи результатом интерполяции единичного отсчёта, соответствующего k -моменту дискретизации, представляет собой многочлен степени $N-1$, график которого пересекает ось абсцисс во все моменты дискретизации $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}, \tau_{k+1}, \dots, \tau_{N-1}$, кроме τ_k , в который он принимает значение 1.

Поскольку все корни многочлена $\varphi_k(t)$ известны, можем записать:

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \alpha_{N-1}^{(k)} (t - \tau_0)(t - \tau_1) \dots (t - \tau_{k-1})(t - \tau_{k+1}) \dots (t - \tau_{N-1}) = \\ &= \alpha_{N-1}^{(k)} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} (t - \tau_i). \end{aligned}$$

Коэффициент при старшей степени $\alpha_{N-1}^{(k)}$ найдём, используя известное значение многочлена $\varphi_k(\tau_k) = 1$:

$$\varphi_k(\tau_k) = \alpha_{N-1}^{(k)} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} (\tau_k - \tau_i) = 1,$$

откуда

$$\alpha_{N-1}^{(k)} = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} (\tau_k - \tau_i)}$$

и выражение для базисных функций многочлена Лагранжа принимает вид:

$$\varphi_k(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{N-1} \frac{t - \tau_i}{\tau_k - \tau_i}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (6.29)$$

Пример графиков базисных функций (6.29) показан на рис.6.6 для $N = 7$.

Интерполяция многочленом Лагранжа даёт приемлемые результаты на всём интервале интерполяции при $N \leq 8$. При большем числе узлов интерполяции поведение интерполирующей функции в некоторой области вблизи левой и правой границ ин-

тервала интерполяции становится геометрически непредсказуемым: часто имеет место сильная «раскачка» графика интерполирующей функции между узлами интерполяции. При этом внутри интервала интерполяции (вблизи его середины) интерполирующая функция вполне сохраняет геометрическую предсказуемость. В качестве примера на рис. 6.7 показаны соответствующие отмеченному эффекту графики дискретного сигнала, аналогового сигнала и интерполирующей функции.

При неограниченном увеличении количества узлов интерполяции $N \rightarrow \infty$ интерполирующая функция на основе многочлена Лагранжа асимптотически переходит в интерполирующую функцию на основе ряда Котельникова.

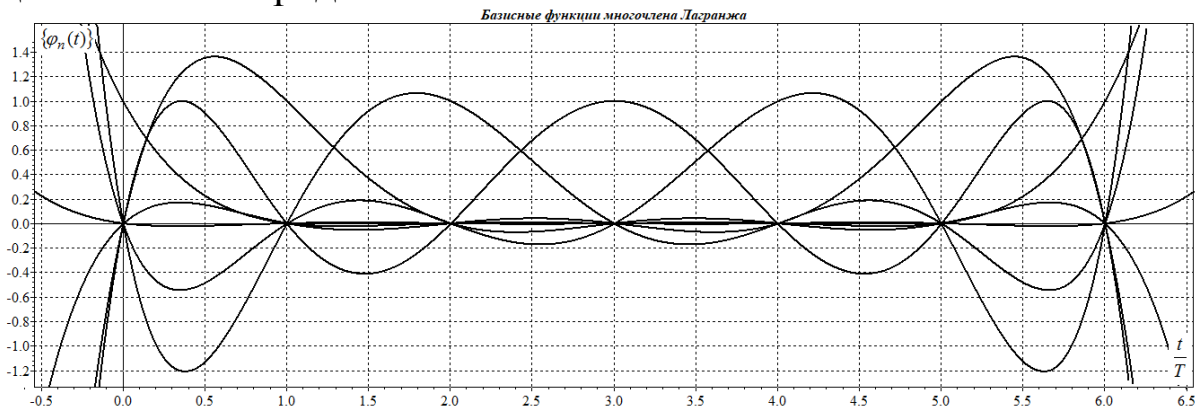


Рис.6.6. Базисные функции многочлена Лагранжа при $N = 7$

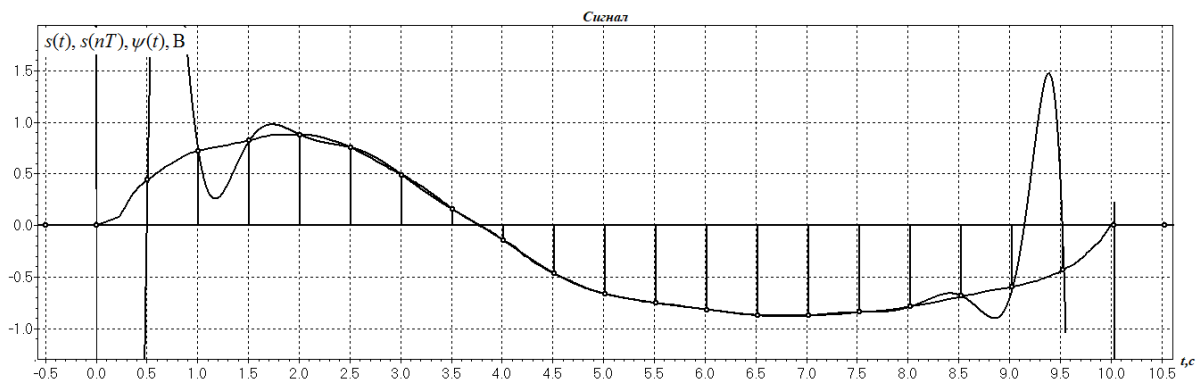


Рис.6.7. Пример интерполяции многочленом Лагранжа при $N = 21$

Действительно, имея в виду разложение синуса в бесконечное произведение (по Эйлеру):

$$\sin(x) = x \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{i^2 \pi^2} \right),$$

порождающую функцию Котельникова можем представить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_0^K(t) &= \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{i^2 T^2}\right) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{iT-t}{iT}\right) \left(\frac{iT+t}{iT}\right) = \\ &= \prod_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{t-t_i}{t_0-t_i}\right), \end{aligned}$$

где $t_i = iT, i \in \mathbb{Z}$. Последнее выражение можно рассматривать как предельный вариант базисной функции Лагранжа (6.29), соответствующей моменту дискретизации $\tau_{\frac{N-1}{2}} = 0$ при симметричном

расширении сетки дискретизации $\tau_0 \rightarrow -\infty, \tau_{N-1} \rightarrow +\infty$.

6.4. Локальная полиномиальная интерполяция

6.4.1. Геометрические правила формирования интерполирующей кривой

При локальной полиномиальной интерполяции интерполирующая функция является совокупностью своих фрагментов $\psi_k(t)$, описывающих её на соответствующем частном интервале $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

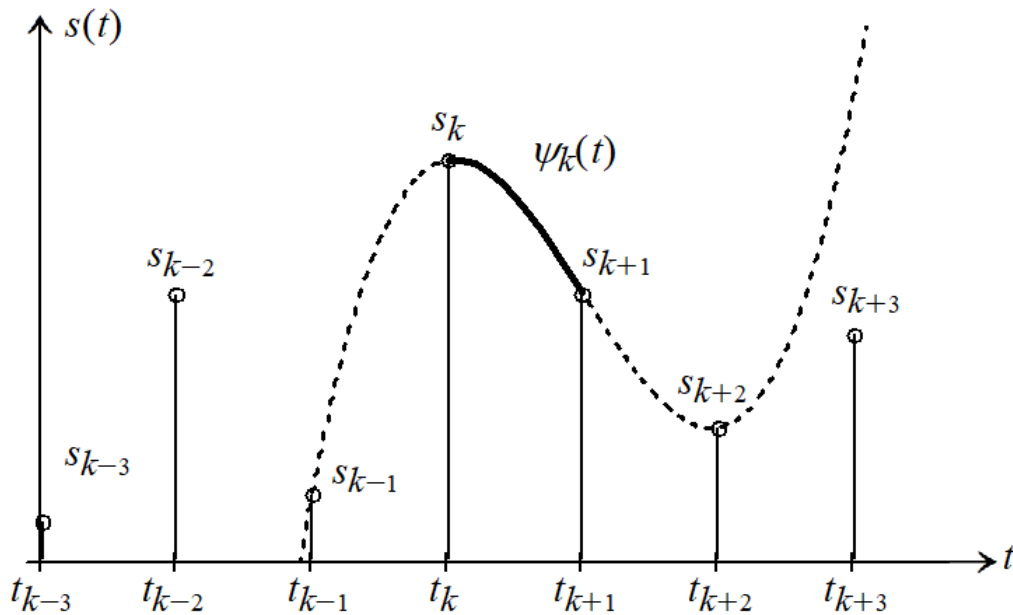


Рис.6.8. Формирование интерполирующего фрагмента при локальной полиномиальной интерполяции первого порядка

График интерполирующего фрагмента $\psi_k(t)$ совпадает с графиком многочлена Лагранжа, построенном на граничных узлах рассматриваемого интервала, а также на M предшествующих и M последующих узлах интерполяции. M называется порядком интерполяции. На рис.6.8 показан пример при $M = 1$. Вспомогательный многочлен показан пунктирной линией, а сплошной линией отмечен график фрагмента интерполирующей функции $\psi_k(t)$. Интерполирующая функция, таким образом, на каждом частном интервале представляет собой многочлен степени $2M + 1$.

Линейность интерполяции следует из линейности интерполяции на основе многочлена Лагранжа. Поскольку правила формирования интерполирующей функции одинаковы на каждом интервале дискретизации, метод является регулярным. Симметрия учёта узлов интерполяции указывает на его изотропность.

Так как в формировании интерполирующего фрагмента участвует конечное количество отсчётов, метод интерполяции является локальным и выражение (6.11а) даёт

$$\psi_k(t) = \sum_{m=-M}^{M+1} s_{k+m} \varphi_0(t - t_{k+m}). \quad (6.30)$$

6.4.2. Локальная полиномиальная интерполяция нулевого порядка

В простейшем случае рассматриваемый подход приводит к кусочно-линейной интерполяции, при которой интерполирующая функция представляет собой совокупность отрезков прямой, соединяющих каждые два соседних узла интерполяции. Порождающая функция, как нетрудно увидеть, выполняя интерполяцию единичного отсчёта, описывается выражением

$$\varphi_0(t) = \left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right). \quad (6.31)$$

Спектральная плотность порождающей функции

$$\Phi_0(\omega) = T \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (6.32)$$

Графики порождающей функции (6.31) и её спектральной плотности (6.32) при $T = 1$ показаны на рис.6.9.

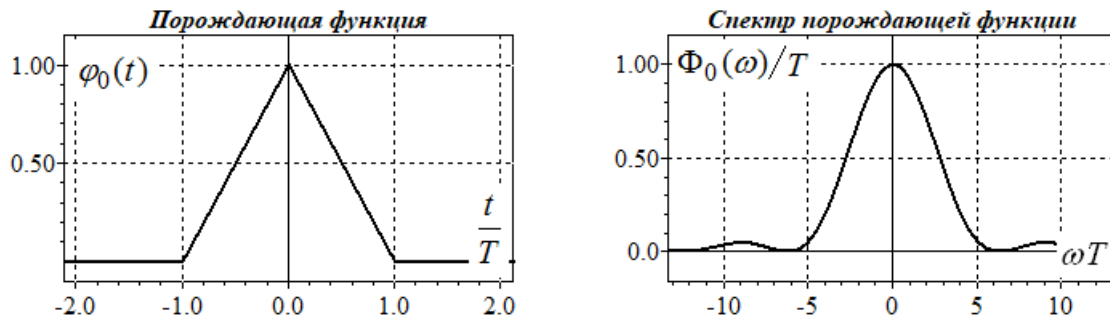


Рис.6.9. Порождающая функция и её спектральная плотность при кусочно-линейной интерполяции

Значение граничной частоты метода приведено в табл. 6.1. Формула (6.30) упрощается до

$$\psi_k(t) = s_k \varphi_0(t - t_k) + s_{k+1} \varphi_0(t - t_{k+1}). \quad (6.33)$$

Таблица 6.1.

Граничные частоты методов локальной полиномиальной интерполяции

M	$(\omega T)_{гр}$, рад	
	$K_{и.доп} = 0,01$ (-40дБ)	$K_{и.доп} = 0,001$ (-60дБ)
0	0,34	0,11
1	0,91	0,51
2	1,26	0,85
3	1,50	1,05

6.4.3. Локальная полиномиальная интерполяция первого порядка

Рассмотрим кусочно-полиномиальную интерполяцию первого порядка $M = 1$. Для нахождения порождающей функции интерполяционного базиса следует рассмотреть интерполяцию единичного отсчёта. Для уменьшения громоздкости выкладок будем исследовать случай $T = 1$, имея в виду, то выражение для порождающей функции при произвольном периоде дискретизации может быть получено из выражения для порождающей функции при единичном периоде дискретизации путём замены в нём t на $\frac{t}{T}$.

Построение интерполирующего фрагмента $\psi_0(t)$ на интер-

вале $t \in [0,1]$ иллюстрируется рис. 6.10. $\psi_0(t)$ является многочленом 3-й степени, корни которого известны (см. рис.6.10), что позволяет представить его в виде:

$$\psi_0(t) = a_3^{(0)}(t+1)(t-1)(t-2).$$

Коэффициент при старшей степени $a_3^{(0)}$ определим, исходя из условия в нуле:

$$\psi_0(0) = a_3^{(0)}(0+1)(0-1)(0-2) = 1,$$

откуда $a_3^{(0)} = \frac{1}{2}$ и $\psi_0(t) = \frac{1}{2}(t+1)(t-1)(t-2)$.

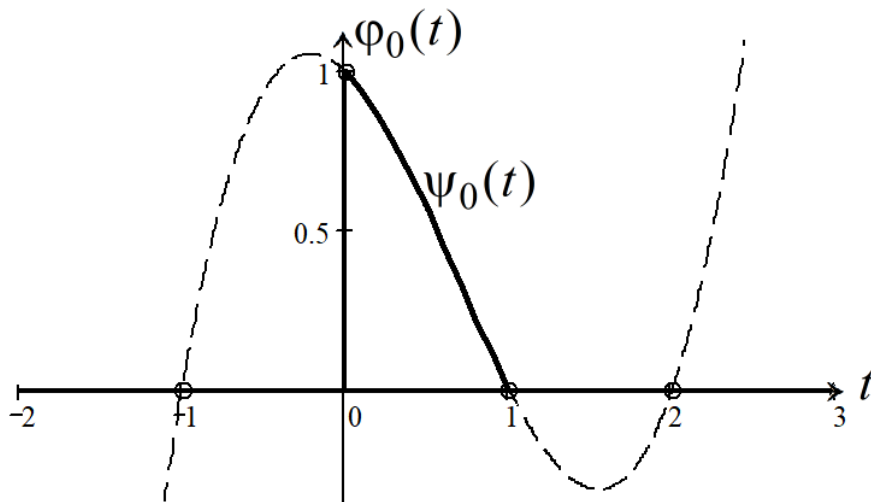


Рис.6.10. Построение фрагмента порождающей функции на $t \in [0,1]$

Построение интерполирующего фрагмента $\psi_1(t)$ на интервале $t \in [1,2]$ иллюстрируется рис. 6.11. $\psi_1(t)$ является многочленом 3-й степени, корни которого известны (см. рис.6.11), что позволяет представить его в виде:

$$\psi_1(t) = a_3^{(1)}(t-1)(t-2)(t-3).$$

Коэффициент при старшей степени $a_3^{(1)}$ определим, исходя из условия в нуле:

$$\psi_1(0) = a_3^{(1)}(0-1)(0-2)(0-3) = 1,$$

откуда $a_3^{(1)} = \frac{1}{6}$ и $\psi_1(t) = -\frac{1}{6}(t-1)(t-2)(t-3)$.

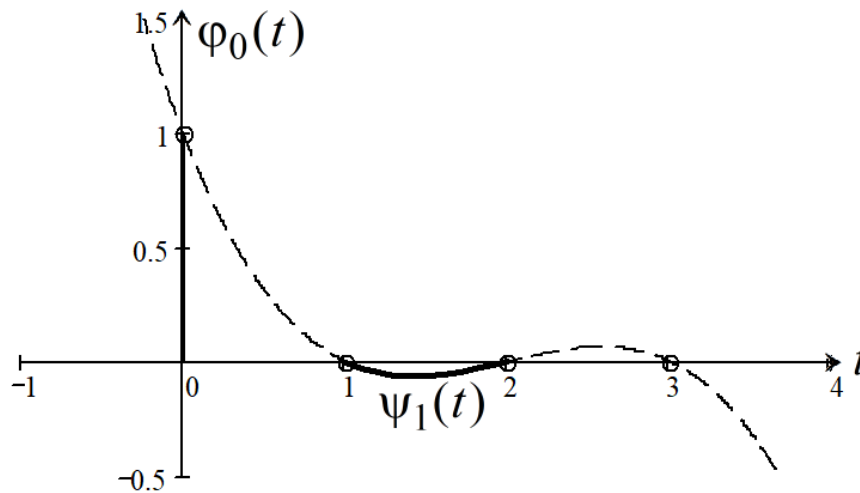


Рис.6.11. Построение фрагмента порождающей функции на $t \in [1, 2]$

На других интервалах, расположенных правее $[1, 2]$, при построении интерполирующего фрагмента будем иметь совокупность узлов с нулевыми ординатами и, соответственно, получим $\psi_{k>1}(t) = 0$.

Полное выражение для порождающей функции получим с учётом того, что изотропный метод интерполяции имеет чётно-симметричную порождающую функцию, поэтому в найденном нами выражении для положительных $t > 0$ следует t заменить на $|t|$.

Окончательно для порождающей функции при первом порядке интерполяции запишем:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(|\tau|+1)(|\tau|-1)(|\tau|-2), & |\tau| < 1 \\ -\frac{1}{6}(|\tau|-1)(|\tau|-2)(|\tau|-3), & 1 \leq |\tau| < 2, \\ 0, & |\tau| \geq 2 \end{cases} \quad (6.34)$$

где $\tau = t/T$.

Графики порождающей функции (6.34) и её спектральной плотности показаны на рис.6.12. Значение граничной частоты приведено в табл.6.1. Формула (6.30) упрощается до

$$\psi_k(t) = s_{k-1}\varphi_0(t-t_{k-1}) + s_k\varphi_0(t-t_k) + s_{k+1}\varphi_0(t-t_{k+1}) + s_{k+2}\varphi_0(t-t_{k+2}). \quad (6.35)$$

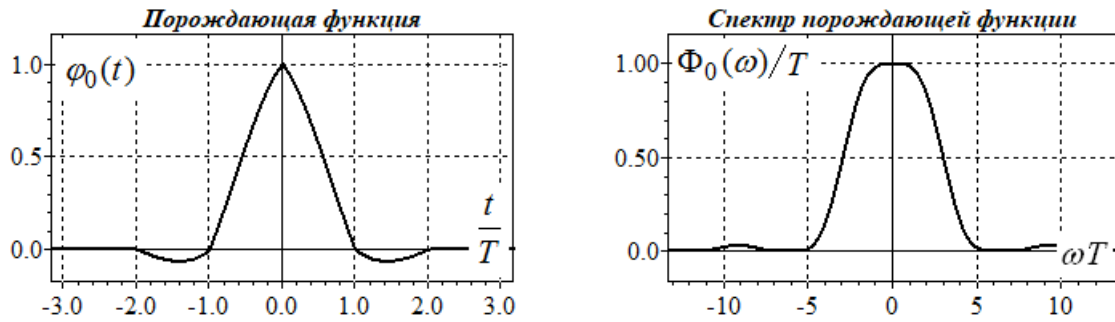


Рис.6.12. Порождающая функция при полиномиальной интерполяции и её спектральная плотность при $M = 1$

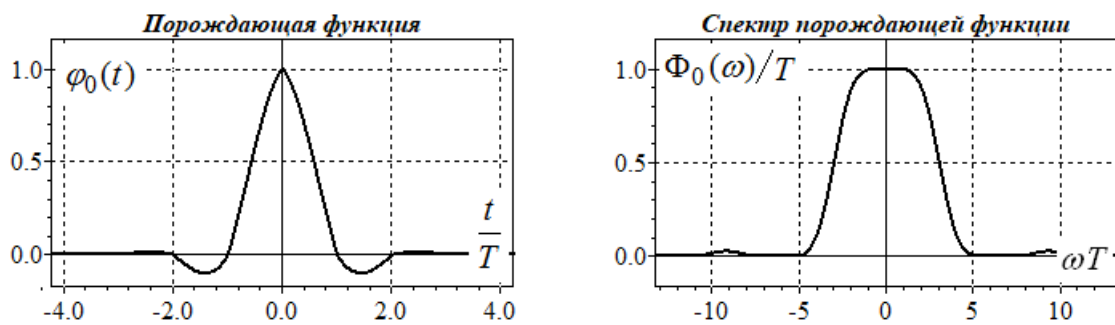


Рис.6.13. Порождающая функция при полиномиальной интерполяции и её спектральная плотность при $M = 2$

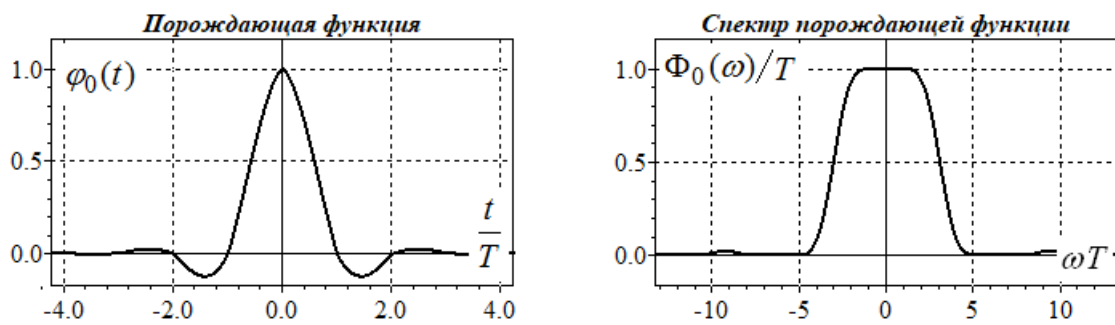


Рис.6.14. Порождающая функция при полиномиальной интерполяции и её спектральная плотность при $M = 3$

6.4.4. Локальная полиномиальная интерполяция второго порядка

Аналогично п.6.4.3 в случае локальной полиномиальной интерполяции при $M = 2$ получим

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} -\frac{1}{12}(|\tau|+2)(|\tau|+1)(|\tau|-1)(\tau-2)(|\tau|-3), & |\tau| < 1 \\ \frac{1}{24}(|\tau|+1)(|\tau|-1)(|\tau|-2)(\tau-3)(|\tau|-4), & 1 \leq |\tau| < 2 \\ -\frac{1}{120}(|\tau|-1)(|\tau|-2)(|\tau|-3)(\tau-4)(|\tau|-5), & 2 \leq |\tau| < 3 \\ 0, & |\tau| \geq 3 \end{cases} \quad (6.36)$$

где $\tau = t/T$.

Графики порождающей функции (6.36) и её спектральной плотности показаны на рис.6.13. Значение граничной частоты приведено в табл.6.1.

6.4.5. Локальная полиномиальная интерполяция третьего порядка

Аналогично п.6.4.3 в случае локальной полиномиальной интерполяции при $M = 3$ получим

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \prod_{n=-3, n \neq 0}^4 (1+|\tau|/n), & |\tau| < 1 \\ \prod_{n=-2, n \neq 0}^5 (1+|\tau|/n), & 1 \leq |\tau| < 2 \\ \prod_{n=-1, n \neq 0}^6 (1+|\tau|/n), & 2 \leq |\tau| < 3, \\ \prod_{n=0, n \neq 0}^7 (1+|\tau|/n), & 3 \leq |\tau| < 4 \\ 0, & |\tau| \geq 4 \end{cases} \quad (6.37)$$

где $\tau = t/T$.

Графики порождающей функции (6.37) и её спектральной

плотности показаны на рис.6.14. Значение граничной частоты приведено в табл.6.1.

6.4.6. Общая формула для порождающей функции при локальной полиномиальной интерполяции

Обобщая результаты п.п. 6.4.3 – 6.4.5 запишем выражение для порождающей функции интерполяционного базиса при локальной полиномиальной интерполяции при произвольном порядке интерполяции M :

$$\varphi_0(t) = \sum_{i=0}^{M+1} \prod_{\substack{n=-M+i, \\ n \neq 0}}^{M+i+1} \left(1 - \frac{|t|}{nT} \right) \text{rect} \left(\frac{|t| - iT - T/2}{T} \right). \quad (6.38)$$

6.5. Численная оценка производных аналогового сигнала в моменты дискретизации

Численная оценка производных аналогового сигнала в моменты дискретизации может быть осуществлена путём дифференцирования его интерполирующей функции. К сожалению, интерполяция, рассмотренная в п.6.4 не обеспечивает дифференцируемость интерполирующей функции в моменты дискретизации.

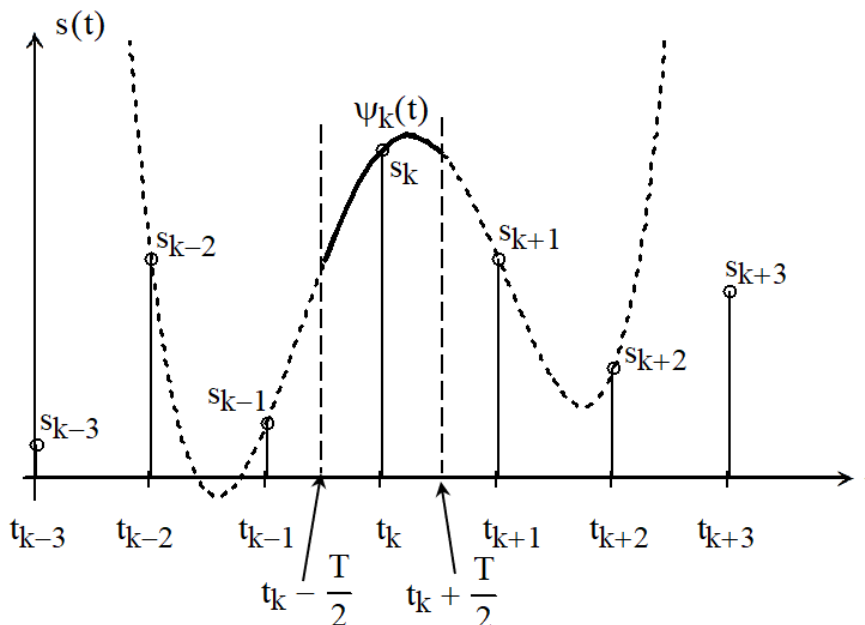


Рис.6.15. Изменённый подход к формированию интерполирующего фрагмента при локальной полиномиальной интерполяции второго порядка

Однако геометрический подход к формированию интерполирующей кривой может быть изменён, соответственно текущей задаче. На каждом частном интервале $t \in [t_k - 0,5T, t_k + 0,5T]$ фрагмент интерполирующей функции $\psi_k(t)$ положим совпадающим с интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным на узле (t_k, s_k) , а также M предшествующих и M последующих узлах (рис.6.15). M называется порядком интерполяции. На рис. 6.15 показан пример при $M = 2$. Вспомогательный многочлен показан пунктирной линией, а сплошной линией отмечен график фрагмента интерполирующей функции $\psi_k(t)$. Интерполирующая функция, таким образом, на каждом частном интервале представляет собой многочлен степени $2M$.

Линейность интерполяции следует из линейности интерполяции на основе многочлена Лагранжа. Поскольку правила формирования интерполирующей функции одинаковы на каждом интервале дискретизации, метод является регулярным. Симметрия учёта узлов интерполяции указывает на его изотропность.

Так как в формировании интерполирующего фрагмента участвует конечное количество отсчётов, метод интерполяции является локальным и выражение (6.11а) даёт

$$\psi_k(t) = \sum_{m=-M}^M s_{k+m} \varphi_0(t - t_{k+m}). \quad (6.39)$$

Благодаря тому, что узлы стыковки фрагментов интерполирующей функции находятся на середине интервалов дискретизации, интерполирующая функция в моменты дискретизации дифференцируема и приближённый расчёт отсчёта l -й производной сигнала $s_k^{(l)}$ в момент t_k может быть выполнен как

$$s_k^{(l)} = s^{(l)}(t_k) \approx \psi_k^{(l)} = \sum_{m=-M}^M s_{k+m} \varphi_0^{(l)}(t_k - t_{k+m}).$$

Имея в виду, что $t_k - t_{k+m} = kT - (k+m)T = -mT$, обозначив

$$d_m^{(l)} = \varphi_0^{(l)}(-mT) \quad (6.40)$$

- коэффициенты алгоритма оценки l -й производной сигнала, сам алгоритм оценки производной получим в виде:

$$s_k^{(l)} = \sum_{m=-M}^M s_{k+m} d_m^{(l)}. \quad (6.41)$$

Поскольку порождающая функция чётно-симметрична, дополнительно заметим, что

$$\begin{aligned} d_m^{(l)} &= -d_{(-m)}^{(l)}; \quad d_0^{(l)} = 0, \quad l - \text{нечётное}; \\ d_m^{(l)} &= d_{(-m)}^{(l)}, \quad l - \text{чётное}; \\ \sum_{m=-M}^M d_m^{(l)} &= 0. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Коэффициенты алгоритма дифференцирования удобно определять для единичного периода дискретизации $T = 1$. В таком случае будем обозначать их $\tilde{d}_m^{(l)}$. Поскольку изменение периода дискретизации приводит к масштабированию порождающей функции при котором в её выражении t заменяется на t/T , то

$$d_m^{(l)} = \frac{\tilde{d}_m^{(l)}}{T^l}. \quad (6.43)$$

Рассмотрим простейший случай $M = 1, T = 1$. Для нахождения порождающей функции применим геометрические правила формирования интерполяционной кривой на единичном отсчёте.

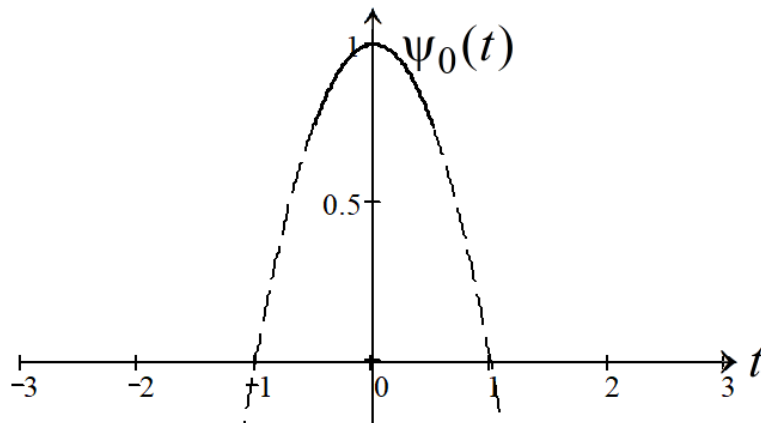


Рис.6.16. Фрагмент порождающей функции на $t \in [-0,5; 0,5]$

На интервале $t \in [-0,5; 0,5]$ (рис.6.16) фрагмент порождающей функции $\psi_0(t)$ совпадает с графиком многочлена, корни которого ± 1 , принимающим единичное значение в нуле:

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= a_2^{(0)}(t-1)(t+1), \\ \psi_0(0) &= a_2^{(0)}(0-1)(0+1) = 1, \end{aligned}$$

откуда $\psi_0(t) = (t-1)(t+1)$.

На интервале $t \in [0,5;1,5]$ (рис.6.17) фрагмент порождающей функции $\psi_1(t)$ совпадает с графиком многочлена, корни которого 1; 2, принимающим единичное значение в нуле:

$$\psi_1(t) = a_2^{(1)}(t-1)(t-2),$$

$$\psi_1(0) = a_2^{(1)}(0-1)(0-2) = 1,$$

откуда $\psi_1(t) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)$.

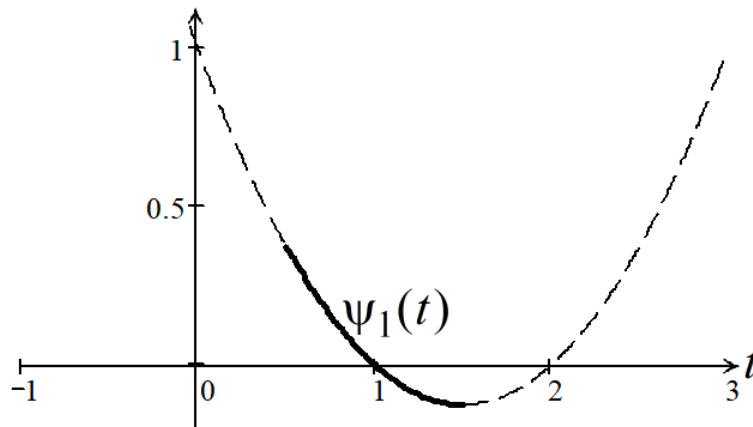


Рис.6.17. Фрагмент порождающей функции на $t \in [0,5;1,5]$

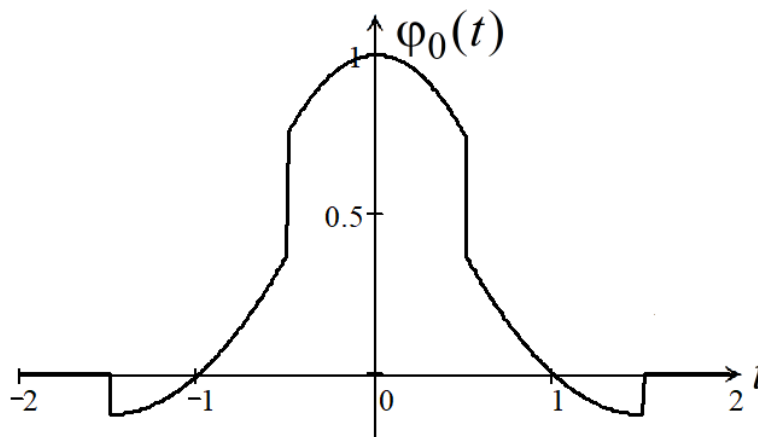


Рис.6.18. Порождающая функция при $M = 1, T = 1$.

Для узлов, лежащих правее единицы $t_k > 1$ все ординаты будут нулевыми, что даст и равные нулю фрагменты порождающей функции. Учитывая и изотропность рассматриваемого метода интерполяции, выражение для порождающей функции может быть записано в виде:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} (1-t^2), & |t| < 0,5 \\ \frac{1}{2}(|t|-1)(|t|-2), & 0,5 \leq |t| < 1,5 \\ 0, & |t| \geq 1,5 \end{cases} \quad (6.44)$$

График порождающей функции (6.44) показан на рис.6.18. Обращает на себя внимание наличие разрывов в узлах стыковки фрагментов порождающей функции, которое указывает на возможное наличие разрывов на графике интерполирующей функции в серединах интервалов дискретизации. Однако мы не имеем намерений использовать данный метод для восстановления сигналов, а разработали его в целях оценки производной. Полученный результат, с учётом (6.40), даёт следующие коэффициенты алгоритма оценки первой производной: $\tilde{d}_{-1}^{(1)} = \varphi'_0(1) = -0,5$; $\tilde{d}_0^{(1)} = \varphi'_0(0) = 0$; $\tilde{d}_1^{(1)} = \varphi'_0(-1) = 0,5$ и из (6.41) сам алгоритм

$$s'_k = \frac{s_{k+1} - s_{k-1}}{2T}. \quad (6.45)$$

Таблица 6.2.

Коэффициенты алгоритмов оценки производной

M	l	$\tilde{d}_{-3}^{(l)}$	$\tilde{d}_{-2}^{(l)}$	$\tilde{d}_{-1}^{(l)}$	$\tilde{d}_0^{(l)}$	$\tilde{d}_1^{(l)}$	$\tilde{d}_2^{(l)}$	$\tilde{d}_3^{(l)}$
1	1			-1/2	0	1/2		
	2			1	-2	1		
2	1		1/12	-2/3	0	2/3	-1/12	
	2		-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12	
	3		-1/2	1	0	-1	1/2	
	4		1	-4	6	-4	1	
3	1	-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60
	2	1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90
	3	1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8
	4	-1/6	2	-13/2	28/3	-13/2	2	-1/6
	5	-1/2	2	-5/2	0	5/2	-2	1/2
	6	1	-6	15	-20	15	-6	1

Рассматривая по аналогии случаи больших порядков интерполяции и обобщая результаты, получим выражение для порождающей функции:

$$\varphi_0(t) = \sum_{i=0}^M \prod_{\substack{n=-M+i, \\ n \neq 0}}^{M+i} \left(1 - \frac{|t|}{nT}\right) \text{rect}\left(\frac{|t| - iT}{T}\right). \quad (6.46)$$

Некоторые коэффициенты алгоритмов дифференцирования, полученные из (6.46) приведены в табл.6.2.

6.6. Локальная сплайновая интерполяция сигналов

6.6.1. Геометрические правила формирования интерполирующей кривой

При сплайновой интерполяции интерполирующая функция является совокупностью своих фрагментов $\psi_k(t)$, описывающих её на каждом частном интервале $t \in [t_k, t_{k+1}]$ (рис.6.19).

Интерполирующие фрагменты стыкуются таким образом, чтобы интерполирующая функция была непрерывна и имела r непрерывных производных. Параметр r называется степенью гладкости.

В частном случае, когда фрагменты интерполирующей функции являются степенными многочленами, говорят о полиномиальной сплайновой интерполяции. При этом интерполирующий фрагмент представляется в виде

$$\psi_k(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_{ik} (t - t_k)^i. \quad (6.47)$$

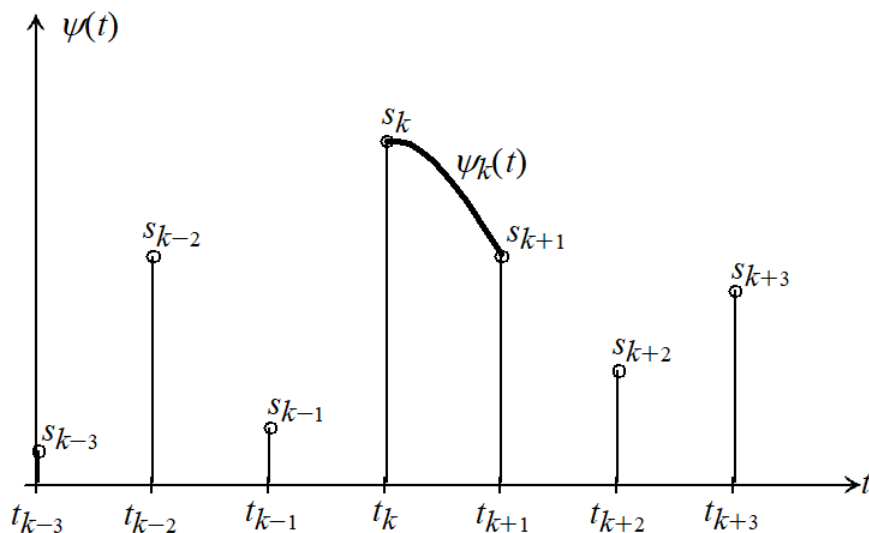


Рис.6.19. Интерполирующий фрагмент

Коэффициенты многочлена (6.47) выбираются из условий, что его график проходит через граничные узлы интервала

$t \in [t_k, t_{k+1}]$, и на его границах имеет r производных, совпадающих с производными восстанавливаемого сигнала:

$$\begin{aligned}\Psi_k(t_k) &= s_k, \\ \Psi_k^{(l)}(t_k) &= s_k^{(l)}, \quad l = 1, \dots, r, \\ \Psi_k(t_{k+1}) &= s_{k+1}, \\ \Psi_k^{(l)}(t_{k+1}) &= s_{k+1}^{(l)}, \quad l = 1, \dots, r.\end{aligned}\tag{6.48}$$

Записанная система содержит $N = 2r + 2$ уравнений и позволяет определить коэффициенты многочлена степени $N - 1$. Производные восстанавливаемого сигнала, как правило, неизвестны и вместо них могут использоваться их численные оценки, производимые, например, на основании алгоритмов, рассмотренных в п.6.5, однако не исключаются и другие методы. При этом порядок интерполяции определяется максимальным порядком используемых алгоритмов оценки производных.

Линейность интерполяции в рассматриваемом случае обусловлена линейностью дифференцирования (и оценивания производных) в результате которой (6.48) является системой линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов интерполирующего фрагмента. Поскольку геометрические правила формирования интерполирующей функции одинаковы на каждом интервале дискретизации, то мы имеем и регулярную интерполяцию. Ввиду сказанного интерполирующая функция всегда может быть представлена в виде (6.11а). Более того, для плавной стыковки интерполирующих фрагментов требуется обеспечить единственность оценки производных одного и того же порядка в моменты дискретизации независимо от того, на каком интервале формируется интерполирующий фрагмент, поэтому оценка производных на левой и правой границе каждого интервала дискретизации должна производиться на основе одного и того же метода, что делает сплайновую интерполяцию ещё и изотропной.

Рассмотрим вопрос сходимости при локальной сплайновой интерполяции с оценкой производных вида (6.41). Перепишем систему (6.49) заменяя производные их численными оценками

$$\begin{aligned}\Psi_k(t_k) &= s_k, \\ \Psi_k^{(l)}(t_k) &= \sum_{m=-M}^M s_{k+m} d_m^{(l)}, \quad l = 1, \dots, r, \\ \Psi_k(t_{k+1}) &= s_{k+1}, \\ \Psi_k^{(l)}(t_{k+1}) &= \sum_{m=-M}^M s_{k+m+1} d_m^{(l)}, \quad l = 1, \dots, r.\end{aligned}\tag{6.49}$$

В п.6.2.2 показано, что сходимость регулярного метода интерполяции имеет место, когда он обеспечивает восстановление единицы независимо от периода дискретизации. Рассматривая восстановление единицы, то есть случай $s_k = 1$, $\Psi_k(t_k) = 1$ и $\Psi_k^{(l)}(t_k) = 0$, из (6.49) получим условия сходимости (ср. с (6.42)):

$$\sum_{m=-M}^M d_m^{(l)} = 0, \quad l = 1, \dots, r.\tag{6.50}$$

6.6.2. Пример: локальная сплайновая интерполяция первой степени гладкости первого порядка

Рассмотрим простейший пример при $r = 1$ и $M = 1$. Для уменьшения громоздкости выкладок порождающую функцию сначала найдём при единичном периоде дискретизации $T = 1$, а затем выпишем выражение при его произвольном значении. Оценку первой производной в узлах интерполяции будем выполнять на основе (6.45). Тогда система (6.49) переписется в виде:

$$\begin{aligned}\Psi_k(t_k) &= s_k, \\ \Psi_k'(t_k) &= s_k' = \frac{s_{k+1} - s_{k-1}}{2}, \\ \Psi_k(t_{k+1}) &= s_{k+1}, \\ \Psi_k'(t_{k+1}) &= s_{k+1}' = \frac{s_{k+2} - s_k}{2}.\end{aligned}$$

Подставляя выражения для интерполирующего фрагмента и его производной

$$\begin{aligned}\Psi_k(t) &= a_{0k} + a_{1k}(t - t_k) + a_{2k}(t - t_k)^2 + a_{3k}(t - t_k)^3, \\ \Psi_k'(t) &= a_{1k} + 2a_{2k}(t - t_k) + 3a_{3k}(t - t_k)^2,\end{aligned}$$

и имея в виду, что $t_{k+1} - t_k = T = 1$, запишем:

$$\begin{aligned} a_{0k} &= s_k, \\ a_{1k} &= \frac{s_{k+1} - s_{k-1}}{2}, \\ a_{0k} + a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} &= s_{k+1}, \\ a_{1k} + 2a_{2k} + 3a_{3k} &= \frac{s_{k+2} - s_k}{2}. \end{aligned}$$

Исключая из системы известные a_{0k} и a_{1k} найдём:

$$\begin{aligned} a_{2k} + a_{3k} &= 0,5s_{k-1} - s_k + 0,5s_{k+1}, \\ 2a_{2k} + 3a_{3k} &= 0,5(s_{k-1} - s_k - s_{k+1} + s_{k+2}), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} a_{0k} &= s_k \\ a_{1k} &= 0,5(s_{k+1} - s_{k-1}) \\ a_{2k} &= s_{k-1} - 2,5s_k + 2s_{k+1} - 0,5s_{k+2} \\ a_{3k} &= -0,5s_{k-1} + 1,5s_k - 1,5s_{k+1} + 0,5s_{k+2}. \end{aligned}$$

При восстановлении единичного отсчёта на интервале $t \in [0,1]$ имеем $k=0$ и $s_{k-1}=0$, $s_k=1$, $s_{k+1}=0$, $s_{k+2}=0$, откуда $a_{00}=1$, $a_{10}=0$, $a_{20}=-2,5$, $a_{30}=1,5$ и

$$\psi_0(t) = 1 - 2,5t^2 + 1,5t^3.$$

При восстановлении единичного отсчёта на интервале $t \in [1,2]$ имеем $k=1$ и $s_{k-1}=1$, $s_k=0$, $s_{k+1}=0$, $s_{k+2}=0$, откуда $a_{01}=0$, $a_{11}=-0,5$, $a_{21}=1$, $a_{31}=-0,5$ и

$$\psi_1(t) = -0,5(t-1) + (t-1)^2 - 0,5(t-1)^3.$$

Интерполяция интервалов, расположенных правее $t \in [1,2]$, будет осуществляться на узлах с нулевыми ординатами и приводить к интерполирующим фрагментам, равным нулю.

Учитывая изотропность рассматриваемого метода интерполяции полное выражение для порождающей функции можем записать в виде:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - 2,5\tau^2 + 1,5|\tau|^3, & |\tau| < 1 \\ -0,5(|\tau|-1) + (|\tau|-1)^2 - 0,5(|\tau|-1)^3, & 1 \leq |\tau| < 2, \\ 0, & |\tau| \geq 2 \end{cases}$$

где $\tau = t/T$.

6.6.3. Оптимальная локальная сплайновая интерполяция

Вернёмся к системе (6.49). Правые части её уравнений содержат коэффициенты алгоритма численной оценки производной восстанавливаемого сигнала. Однако выбор того или иного алгоритма оценки неоднозначен, отсюда и потенциальное многообразие решений задачи локальной сплайновой интерполяции сигналов.

В установленных условиях неоднозначности среди всех возможных решений может быть выбрано наилучшее по какому-нибудь критерию. Вместе с тем, при таком подходе отпадает необходимость в привлечении численной оценки производных вообще, поскольку коэффициенты $\{d_m^l\}_{m=-M}^M$, $l = 1, \dots, r$ можно рассматривать как совокупность независимых переменных, при некоторых значениях которых целевая функция оптимальной задачи достигает глобального максимума.

Как было установлено в п. 6.2.3, наилучшим методом интерполяции следует считать тот, который обеспечивает наименьший коэффициент искажений. Однако коэффициент искажений является функцией частоты и неизбежно возрастает при её приближении к $\omega T = \pi$ для любого локального метода интерполяции (в противном случае спектральная плотность порождающей функции была бы равномерной при $\omega T < \pi$ и изменялась бы скачком при $\omega T = \pi$, что невозможно в классе финитных порождающих функций). Поэтому при заданном уровне допустимых искажений $K_{\text{и.доп}}$ различительным параметром методов регулярной интерполяции является граничная частота $(\omega T)_{\text{гр}}$. Чем больше граничная частота, тем меньше требуется запас по частоте дискретизации для восстановления сигнала с ограниченным спектром. Отсюда оптимальным выбором коэффициентов $\{d_m^l\}_{m=-M}^M$, $l = 1, \dots, r$ следует считать такой, который обеспечивает максимальную граничную частоту, то есть целевая функция оптимальной задачи имеет вид:

$$(\omega T)_{\text{гр}} \left(\{d_m^{(1)}\}_{m=-M}^M, \dots, \{d_m^{(r)}\}_{m=-M}^M \right) \rightarrow \max.$$

Вместе с тем, выбор этих коэффициентов не совсем произволен: они должны быть выбраны и так, чтобы удовлетворять условию сходимости (6.50).

Рассматриваемая задача является многопараметрической однокритериальной задачей оптимизации. Замкнутый вид целевой функции получить затруднительно, что обуславливает отыскание приближенных (квазиоптимальных) решений численными методами. Порождающие функции оптимальных интерполяционных сплайн-базисов при $K_{\text{и.доп}} = 0,001$ для порядка интерполяции $M = 1, 2, 3$ и степеней гладкости $r = 1, 2$ приведены в табл.6.3. Там же даны значения достигаемых граничных частот в нормированных единицах. Графики базисных функций и их спектров показаны на рис.6.20.

Таблица 6.3.

Порождающие функции оптимальных интерполяционных
сплайн-базисов

r	M	$\varphi_0(t)$	$(\omega T)_{\text{гр}}$ рад
1	1	$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - 2,4586\tau^2 + 1,4586\tau^3, & \tau = t/T , \quad t \leq T \\ -0,5414\tau + 1,0829\tau^2 - 0,5414\tau^3, & \tau = t/T - 1, \quad T < t \leq 2T \end{cases}$	0,75
	2	$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - 2,2343\tau^2 + 1,2343\tau^3, & \tau = t/T , \quad t \leq T \\ -0,7657\tau + 1,3826\tau^2 - 0,6169\tau^3, & \tau = t/T - 1, \quad T < t \leq 2T \\ 0,1489\tau - 0,2978\tau^2 + 0,1489\tau^3, & \tau = t/T - 2, \quad 2T < t \leq 3T \end{cases}$	1,02
	3	$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - 2,1173\tau^2 + 1,1173\tau^3, & \tau = t/T , \quad t \leq T \\ -0,8827\tau + 1,4979\tau^2 - 0,6152\tau^3, & \tau = t/T - 1, \quad T < t \leq 2T \\ 0,2675\tau - 0,4840\tau^2 + 0,2165\tau^3, & \tau = t/T - 2, \quad 2T < t \leq 3T \\ -0,0511\tau + 0,1021\tau^2 - 0,0511\tau^3, & \tau = t/T - 3, \quad 3T < t \leq 4T \end{cases}$	1,02
2	1	$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - 1,0182\tau^2 - 4,3122\tau^3 + 7,2100\tau^4 - 2,8796\tau^5, & \tau = t/T , \quad t \leq T \\ -0,5310\tau + 0,5091\tau^2 + 1,6588\tau^3 - 2,7208\tau^4 + 1,0839\tau^5, & \tau = t/T - 1, \\ & T < t \leq 2T \end{cases}$	0,70
	2	$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - 1,1779\tau^2 - 2,8917\tau^3 + 5,0617\tau^4 - 1,9922\tau^5, & \tau = t/T , \quad t \leq T \\ -0,7448\tau + 0,5957\tau^2 + 2,1489\tau^3 - 3,2373\tau^4 + 1,2375\tau^5, & \tau = t/T - 1, \\ & T < t \leq 2T \\ 0,1315\tau - 0,0068\tau^2 - 0,7685\tau^3 + 1,0314\tau^4 - 0,3876\tau^5, & \tau = t/T - 2, \\ & 2T < t \leq 3T \end{cases}$	1,36
	3	$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1 - 1,36\tau^2 - 1,7925\tau^3 + 3,5101\tau^4 - 1,3576\tau^5, & \tau = t/T , \quad t \leq T \\ -0,8451\tau + 0,7473\tau^2 + 1,7872\tau^3 - 2,6821\tau^4 + 0,9927\tau^5, & \tau = t/T - 1, \\ & T < t \leq 2T \\ 0,2461\tau - 0,0570\tau^2 - 1,1009\tau^3 + 1,4422\tau^4 - 0,5304\tau^5, & \tau = t/T - 2, \\ & 2T < t \leq 3T \\ -0,0537\tau - 0,0103\tau^2 + 0,3533\tau^3 - 0,4607\tau^4 + 0,1715\tau^5, & \tau = t/T - 3, \\ & 3T < t \leq 4T \end{cases}$	1,75

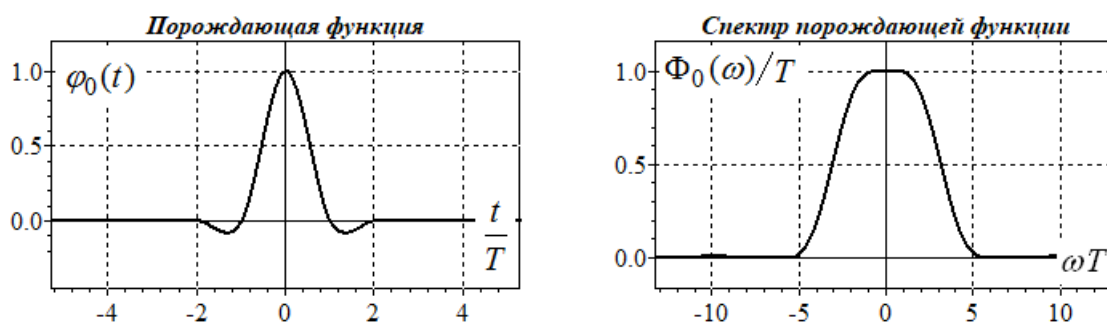


Рис.6.20.а. Порождающая функция локального оптимального интерполяционного сплайн-базиса и её спектральная плотность при $M = 1$, $r = 1$

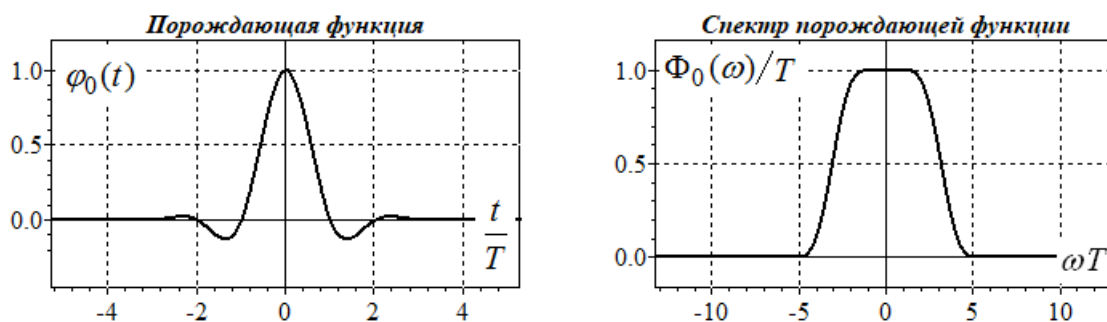


Рис.6.20.б. Порождающая функция локального оптимального интерполяционного сплайн-базиса и её спектральная плотность при $M = 2$, $r = 1$

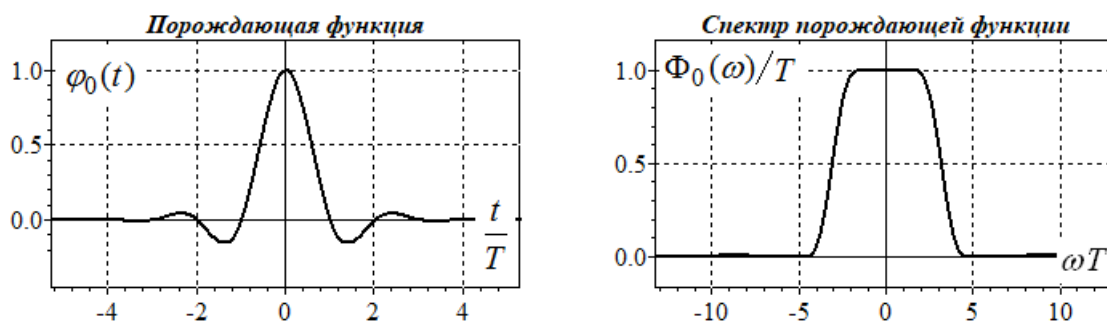


Рис.6.20.в. Порождающая функция локального оптимального интерполяционного сплайн-базиса и её спектральная плотность при $M = 3$, $r = 1$

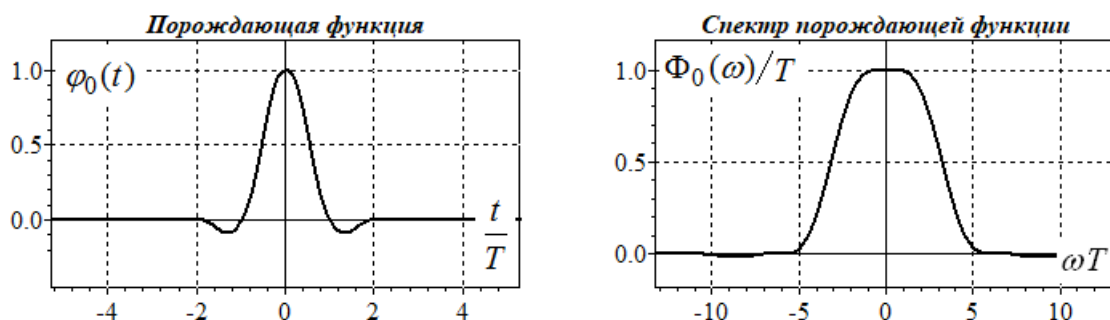


Рис.6.20.г. Порождающая функция локального оптимального интерполяционного сплайн-базиса и её спектральная плотность при $M = 1$, $r = 2$

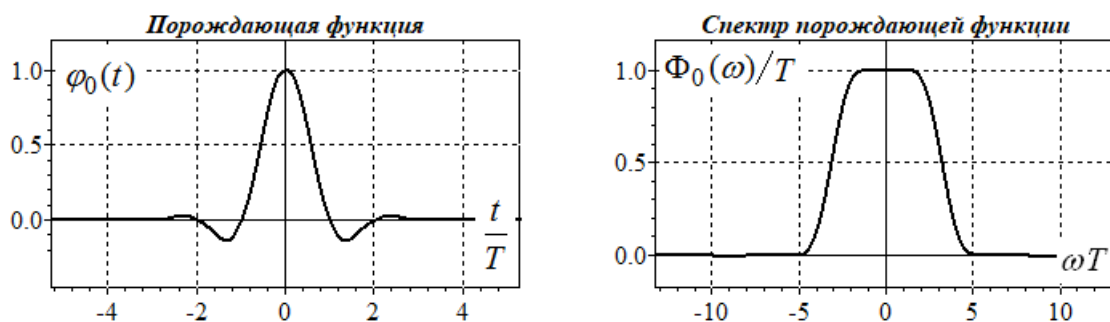


Рис.6.20.д. Порождающая функция локального оптимального интерполяционного сплайн-базиса и её спектральная плотность при $M = 2$, $r = 2$

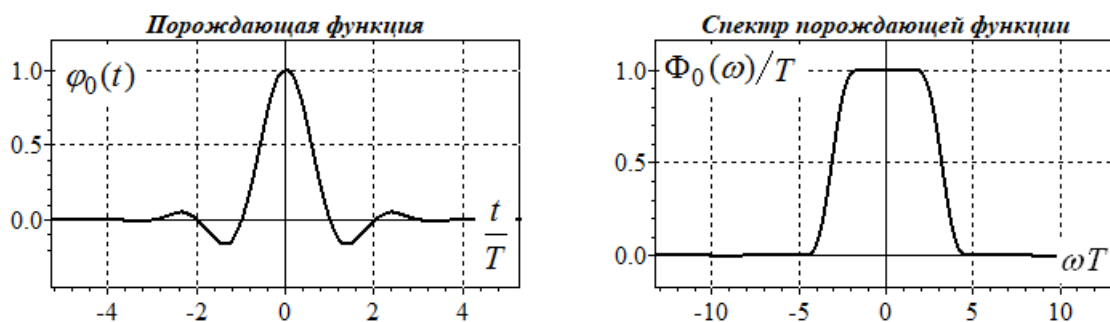


Рис.6.20.е. Порождающая функция локального оптимального интерполяционного сплайн-базиса и её спектральная плотность при $M = 3$, $r = 2$