5. Спектральный анализ дискретных сигналов

5.1. Дискретизация спектра сигнала. Теорема Котельникова в частотной области

Теорема (***Котельникова в частотной области***): Спектр $S(\omega)$ сигнала $s(t)$ ограниченной длительности τ_u полностью определяется своими дискретными значениями $\{S(n\Omega)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, взятыми с интервалом $\Omega \le \dfrac{2\pi}{\tau_u}$ и может быть представлен рядом Котельникова в частотной области:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\Omega)\,\mathrm{sinc}\left[\frac{\pi}{\Omega}(\omega - n\Omega)\right] \qquad (5.1)$$

Доказательство

Рассмотрим сигнал ограниченной длительности $s(t)$ (рис.5.1) и соответствующий сигнал $s_{\text{п}}(t)$, полученный его периодическим повторением с периодом $T_{\text{п}} = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ (рис.5.2-4).

Периодический сигнал $s_{\text{п}}(t)$ представим рядом Фурье в комплексной форме:

$$s_{\text{п}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\Omega t}, \qquad (5.2)$$

где $C_n = \dfrac{1}{T} S(n\Omega)$.

При выполнении условия теоремы $\Omega \le \dfrac{2\pi}{\tau_u}$ периодизация сигнала происходит без наложения повторяющихся копий исходного сигнала и соответствует рис.5.2 и 5.3. так как $T_{\text{п}} \ge \tau_u$, при этом на интервале $\left[-\dfrac{T_{\text{п}}}{2}, \dfrac{T_{\text{п}}}{2}\right]$ имеет место равенство $s(t) = s_{\text{п}}(t)$. С учётом этого для спектральной плотности сигнала запишем:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_{\text{п}}/2}^{T_{\text{п}}/2} s_{\text{п}}(t) e^{-j\omega t} dt.$$

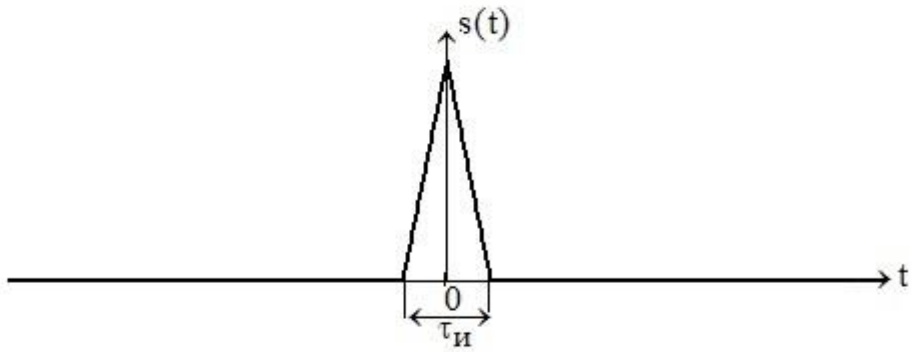

Рис.5.1. Сигнал с ограниченной длительностью

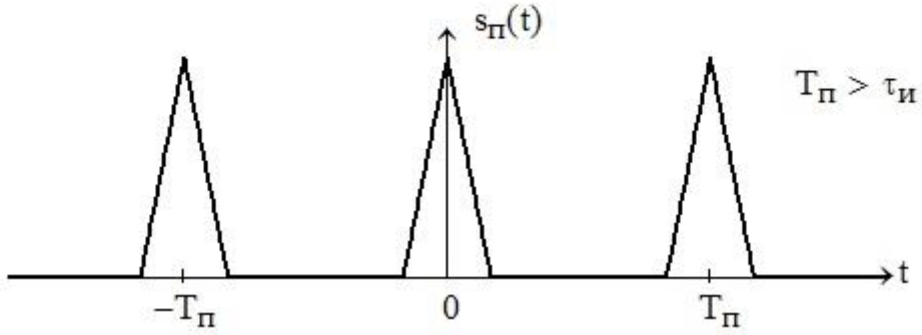

Рис.5.2. Периодический сигнал при $T_п > \tau_и$

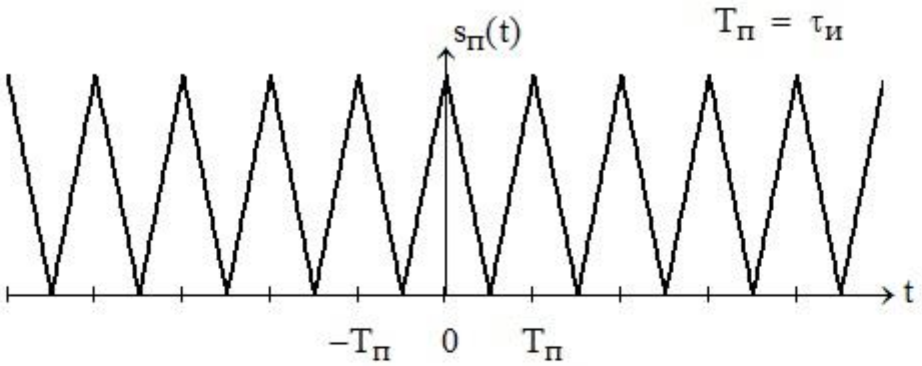

Рис.5.3. Периодический сигнал при $T_п = \tau_и$

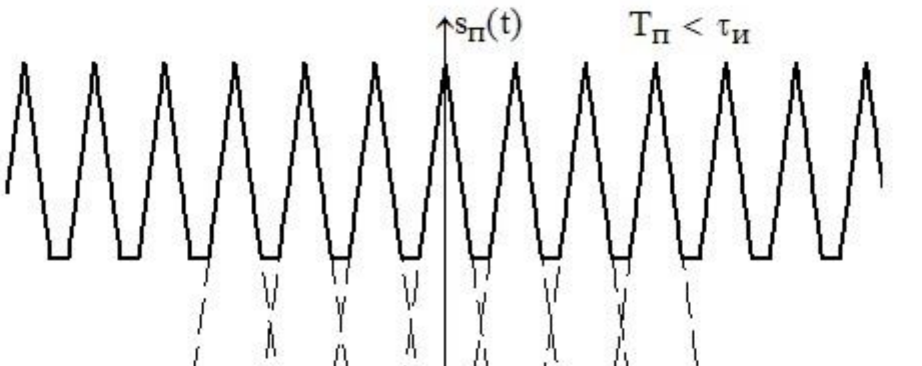

Рис.5.4. Периодический сигнал при $T_п < \tau_и$

Подставим в последнее выражение $s_{\text{п}}(t)$ в виде (5.2) и преобразуем:

$$S(\omega)=\int\limits_{-\frac{T_{\text{п}}}{2}}^{\frac{T_{\text{п}}}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{jn\Omega t}e^{-j\omega t}dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\int\limits_{-\frac{T_{\text{п}}}{2}}^{\frac{T_{\text{п}}}{2}}e^{-j(\omega-n\Omega)t}dt=$$

$$=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n\left.\frac{e^{-j(\omega-n\Omega)t}}{j(\omega-n\Omega)}\right|_{-\frac{T_{\text{п}}}{2}}^{\frac{T_{\text{п}}}{2}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n T_{\text{п}}\operatorname{sinc}\left[\frac{T_{\text{п}}}{2}(\omega-n\Omega)\right]=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}S(n\Omega)\operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{\Omega}(\omega-n\Omega)\right].$$

Полученный результат совпадает с (5.1).

Сделаем несколько замечаний к доказанной теореме.

Переход от сплошного спектра к дискретному соответствует периодизации сигнала. Если условие $\Omega\le\dfrac{2\pi}{\tau_u}$ не выполняется, то происходит наложение периодически повторяющихся копий исходного сигнала – так называемый эффект наложения во временной области. В условиях наложения невозможно однозначно установить спектру какого сигнала принадлежит заданная совокупность отчётов, а, следовательно, и восстановить спектр: результат восстановления спектра зависит от того, какой из сигналов мы выберем в качестве образующего периодическую последовательность.

Теорема Котельникова в частотной области может рассматриваться как следствие из теоремы Котельникова и свойства симметрии преобразования Фурье.

Доказанная теорема относится в равной мере как к спектрам аналоговых сигналов, так и к спектрам дискретных сигналов, то есть речь идёт о дискретизации сплошных спектров вообще. Переход к дискретному спектру является основой методов цифровой обработки сигналов в частотной области.

5.2. Спектральное представление дискретных сигналов

Будем рассматривать дискретные сигналы в виде числовых последовательностей $s=\left\{s[n]\right\}_{n=0}^{N-1}$ длины N. Определим для них операцию сложения и умножения на число поэлементно:

$$\left\{s_1[n]\right\}_{n=0}^{N-1}+\left\{s_2[n]\right\}_{n=0}^{N-1}=\left\{s_1[n]+s_2[n]\right\}_{n=0}^{N-1},$$
$$\lambda\left\{s[n]\right\}_{n=0}^{N-1}=\left\{\lambda s[n]\right\}_{n=0}^{N-1}. \qquad (5.3)$$

Нулевой элемент

$$0=\left\{s[n]=0\right\}_{n=0}^{N-1}. \qquad (5.4)$$

Нетрудно убедиться, что рассматриваемая совокупность дискретных сигналов образует линейное пространство размерности N, поскольку для представления любого сигнала достаточно N базисных элементов вида: $\{1,0,\ldots,0\}$; $\{0,1,\ldots,0\};\ldots\{0,0,\ldots,1\}$.

Введём скалярное произведение:

$$(s_1,s_2)=\sum_{n=0}^{N-1}s_1[n]s_2^*[n]. \qquad (5.5)$$

Убедимся, что введённая операция обладает свойствами скалярного произведения:

1. $(s_1,s_2)^*=\left(\sum_{n=0}^{N-1}s_1[n]s_2^*[n]\right)^*=(s_2,s_1)$;

2. $(\alpha s_1+\beta s_2,s_3)=\sum_{n=0}^{N-1}(\alpha s_1[n]+\beta s_2[n])s_3^*[n]=\alpha(s_1,s_3)+\beta(s_2,s_3)$;

3. $(s,s)=\sum_{n=0}^{N-1}s[n]s^*(n)=\sum_{n=0}^{N-1}\left|s[n]\right|^2\geq 0$.

Норма, порождённая скалярным произведением:

$$\|s\|=\sqrt{(s,s)}=\sum_{n=0}^{N-1}|s[n]|^2. \qquad (5.6)$$

Рассмотрим в линейном пространстве дискретных сигналов конечной длины N систему решетчатых функций вида:

$$\varphi_k=\left\{\varphi_k[n]\right\}_{n=0}^{N-1}=\left\{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right\}_{n=0}^{N-1},\quad k=0,\ldots,N-1. \qquad (5.7)$$

Данная система функций ортогональна, действительно:

$$(\varphi_k,\varphi_m)=\sum_{n=0}^{N-1}\varphi_k[n]\varphi_m^*[n]=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}kn}e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}=\begin{cases}N,k=m\\ 1+e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}+\ldots+e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)(N-1)},k\neq m\end{cases}.$$

Рассматривая сумму в последнем выражении, как сумму первых N членов геометрической прогрессии с начальным членом 1 и знаменателем $e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}$, получим:

$$(\varphi_k,\varphi_m)=\begin{cases}N,k=m\\ \dfrac{1-e^{j2\pi(k-m)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}},k\neq m\end{cases}=\begin{cases}N,k=m\\ 0,k\neq m\end{cases}.$$

Квадрат нормы рассматриваемых функций

$$\|\varphi_k\|^2=N,\ \ k=0,\ldots,N-1. \qquad (5.8)$$

Система функций (5.7) не только ортогональна, но и полна, так как количество функций в системе совпадает с размерностью пространства N, поэтому образует ортогональный базис, то есть любой сигнал в рассматриваемом пространстве может быть представлен в виде:

$$s=\sum_{k=0}^{N-1}C_k\varphi_k,$$

где $C_k=\dfrac{1}{\|\varphi_k\|^2}(s,\varphi_k)$. Обозначив $S_д[k]=NC_k$, подставив базисные функции и развернув скалярное произведение, последние выражения перепишем как:

$$S_д[k]=\sum_{n=0}^{N-1}s[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\ \ k=0,\ldots,N-1. \qquad (5.9а)$$

$$s[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}S_д[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk},n=0,\ldots,N-1 \qquad (5.9б)$$

Пара выражений (5.9) определяет взаимно-однозначное преобразование последовательностей $\left\{s[n]\right\}_{n=0}^{N-1}$ и $\left\{S_{д}[k]\right\}_{n=0}^{N-1}$. Преобразование (5.9а) называется прямым дискретным преобразованием Фурье (ДПФ). Преобразование (5.9б) называется обратным дискретным преобразованием Фурье (ОДПФ).

Сокращённо соответствие в смысле (5.9) обозначается как $s[n] \leftrightarrow S_{д}[k]$, прямое ДПФ $S_{д}[k] = DFT\left\{s[n]\right\}$, обратное $s[n] = DFT^{-1}\{S_{д}[k]\}$ от английского «Discrete Fourier Transform».

Как видно из (5.9б) при ДПФ дискретный сигнал представляется в виде совокупности комплексных гармонических дискретных сигналов с частотами $\Omega_k = \dfrac{2\pi}{NT}k$ с амплитудами $\dfrac{1}{N}\left|S_{д}[k]\right|$ и начальными фазами $\varphi_{S_{д}}[k] = \arg S_{д}[k]$. Сами значения $\dfrac{1}{N}S_{д}[k]$ при этом имеют смысл комплексных амплитуд комплексных гармоник сигнала. В случае, когда рассматриваются действительные сигналы возможна и тригонометрическая, более наглядная, форма ОДПФ:

$$s[n] = \operatorname{Re} s[n] = \operatorname{Re}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_{д}[k]e^{j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |\, S_{д}[k]\,| \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk + \varphi_{S_{д}}[k]\right).$$

Последовательность $\left\{S_{д}[k]\right\}_{k=0}^{N-1}$ называется комплексным дискретным спектром дискретного сигнала. Последовательность $\left\{\left|S_{д}[k]\right|\right\}_{k=0}^{N-1}$ называется амплитудным дискретным спектром дискретного сигнала. Последовательность $\left\{\varphi_{S_{д}}[k]\right\}_{k=0}^{N-1}$ называется фазовым дискретным спектром дискретного сигнала.

ДПФ связано с Z-преобразованием дискретного сигнала:

$$S_{д}[k] = S(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]z^{-n}\Bigg|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \qquad (5.10)$$

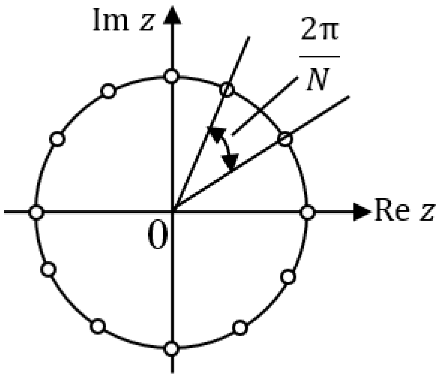

Рис.5.5. z-плоскость

В соответствии с (5.10) ДПФ можно рассматривать как Z – преобразование сигнала, взятое в N точках, равномерно распределённых на единичной окружности комплексной z - плоскости (рис.5.5).

Если снять ограничения на изменение дискретных переменных n, k в (5.9), то нетрудно убедиться, что дискретное преобразование Фурье связывает две периодические последовательности периода N. В дальнейшем, если не оговорено особо будем считать n и k целыми числами.

5.3. Основные свойства ДПФ

Рассмотрим некоторые основные свойства ДПФ. Особое внимание следует обратить на то, что свойства ДПФ формулируются именно для неограниченных n и k, а последовательности $\{s[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{s_{1,2,3}[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ и $\{S_д[k]\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\{S_{д1,2,3}[k]\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ рассматриваются периодическими с периодом N.

5.3.1. Линейность

$$DFT\{k_1 s_1[n] + k_2 s_2[n]\} = k_1 DFT\{s_1[n]\} + k_2 DFT\{s_2[n]\}. \qquad (5.11)$$

Доказательство свойства линейности может быть осуществлено непосредственной подстановкой в (5.9). Выполнение свойства линейности означает, что линейной комбинации сигналов соответствует такая же линейная комбинация их дискретных комплексных спектров.

5.3.2. Циклический сдвиг

$$DFT\{s[n-m]\} = DFT\{s[n]\} e^{-j\frac{2\pi}{N}km}, m = 0, \pm1, \pm2, \ldots \qquad (5.12)$$

Для доказательства рассмотрим ОДПФ сигнала со сдвигом

$$s[n-m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_д[k] e^{j\frac{2\pi}{N}(n-m)k} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(S_д[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

$$= DFT^{-1}\left\{ S_{д}[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} \right\},$$

откуда в виду взаимной однозначности ДПФ следует (5.12).

5.3.3. Циклическая свёртка

Циклическая свёртка определяется для двух дискретных сигналов периода N выражением

$$s_1 * s_2[n] = \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n']s_2[n-n'] = \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n-n']s_2[n']. \qquad (5.13)$$

В результате выполнения циклической свёртки получается дискретный сигнал с периодом N .

Циклической свёртке сигналов соответствует произведение их ДПФ:

$$DFT\{s_1 * s_2[n]\} = DFT\{s_1[n]\}DFT\{s_2[n]\}. \qquad (5.14)$$

Действительно, учетом свойств линейности и циклического сдвига имеем:

$$DFT\{s_1 * s_2[n]\} = DFT\left\{ \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n']s_2[n-n'] \right\} =$$

$$= \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n']DFT\{s_2[n-n']\} = DFT\{s_2[n]\} \sum_{n'=0}^{N-1} s_1[n']e^{-j\frac{2\pi}{N}kn'} =$$

$$= DFT\{s_1[n]\} DFT\{s_2[n]\}.$$

5.4. Спектральная плотность дискретного сигнала и дискретное преобразование Фурье

Для определения спектра дискретного сигнала рассмотрим его преобразование Фурье:

$$S_{д}(\omega) = F\{s_{д}(t)\} = F\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)\delta(t-nT) \right\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)F\{\delta(t-nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)e^{-j\omega nT} = \qquad (5.15)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s[n]e^{-j\omega nT}.$$

Полученное выражение позволяет определить спектральную плотность дискретного сигнала, когда известна последовательность $\{s[n]\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Спектральная плотность дискретного сигнала, к которому применимо Z – преобразование может быть выражена через последнее. Сравнивая выражения для спектра и Z – преобразования такого сигнала

$$S_{д}(\omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}s[n]e^{-j\omega nT} \quad \text{и} \quad S(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}s[n]z^{-n},$$

установим, что

$$S_{д}(\omega)=S(z)\big|_{z=e^{j\omega T}}=S(e^{j\omega T}). \qquad (5.16)$$

Запись $S(e^{j\omega T})$ часто также используется как обозначение спектральной плотности дискретного сигнала. Спектральная плотность дискретного сигнала, таким образом, является его Z – преобразованием, рассматриваемым на единичной окружности комплексной плоскости параметра z.

Структура (5.15) такова, что $S_{д}(\omega)$ можно рассматривать и как функцию нормированной частоты ωT. Один период спектра дискретного сигнала занимает интервал $[0,\omega_{д}]$ при этом ωT изменяется от нуля до 2π.

Рассмотрим теперь сигналы ограниченной длительности $\tau_{и}$ так, что ненулевые отсчёты имеют номера $n=0,...,N-1$ и $N>>1$, при этом $\tau_{и}=(N-1)T\approx NT$. Дискретизируем спектр такого сигнала с максимальным шагом дискретизации $\Omega=\dfrac{2\pi}{\tau_{и}}=\dfrac{2\pi}{NT}$, при этом

$$\Omega T=\frac{2\pi}{N}. \qquad (5.17)$$

Из (5.15) получим отсчёты спектра:

$$S_{д}(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}s[n]e^{-jk\Omega nT}=\sum_{n=0}^{N-1}s[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=$$

$$=DFT\{s[n]\}=S_{д}[k].$$

Последняя запись показывает, что ДПФ последовательности

$\{s[n]\}_{n=0}^{N-1}$ даёт дискретные значения спектра $S_д(\omega)$, взятые с максимальным шагом.

5.5. Быстрое преобразование Фурье

Быстрое преобразование Фурье (БПФ) – это алгоритм, позволяющий сократить количество операций умножения при вычислении ДПФ. Как видно из (5.9а), для расчёта значений $\{S_д[k]\}_{k=0}^{N-1}$ требуется N^2 операций комплексного умножения (N умножений при однократном расчёте суммы, и эту сумму требуется посчитать N раз). Существует большое количество различных алгоритмов БПФ, в данном разделе будет рассмотрен только один пример БПФ по основанию 2, то есть предполагается, что N является натуральной степенью числа 2.

Введём обозначение $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ и отметим некоторые свойства этой величины:

$$W_N^2 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{N/2}; \tag{5.18а}$$

$$W_N^{N/2} = \left(e^{-j\frac{2\pi}{N}}\right)^{N/2} = e^{-j\pi} = -1; \tag{5.18б}$$

$$W_N^{(N/2+m)} = W_N^{N/2} W_N^m = -W_N^m. \tag{5.18в}$$

В последовательности $\{s[n]\}_{n=0}^{N-1}$ выделим две подпоследовательности так, чтобы одна $\{s_ч[n]\}_{n=0}^{N/2-1}$ содержала только члены исходной последовательности с чётными номерами, а другая $\{s_н[n]\}_{n=0}^{N/2-1}$ – только с нечётными:

$$s_ч[n] = s[2n];$$

$$s_н[n] = s[2n+1], \quad n = 0,\ldots,N/2-1.$$

С учётом введённых обозначений преобразуем (5.9а):

$$S_{\text{д}}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}s[n]W_N^{nk}=\sum_{\substack{n=0\\ n-\textit{чётое}}}^{N-1}s[n]W_N^{nk}+\sum_{\substack{n=0\\ n-\textit{нечётое}}}^{N-1}s[n]W_N^{nk}=$$
$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}s[2n]W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1}s[2n+1]W_N^{(2n+1)k}=$$
$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}s_{\text{ч}}[n]\left(W_N^2\right)^{nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1}s_{\text{н}}[n]\left(W_N^2\right)^{nk}W_N^k=$$
$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}s_{\text{ч}}[n]W_{N/2}^{nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1}s_{\text{н}}[n]W_{N/2}^{nk}W_N^k=$$
$$=S_{\text{ч}}[k]+W_N^kS_{\text{н}}[k],\quad k=0,...,N-1,$$

где $S_{\text{ч}}[k]=DFT\{s_{\text{ч}}[n]\}$ и $S_{\text{н}}[k]=DFT\{s_{\text{н}}[n]\}$ - $N/2$ - точечные ДПФ подпоследовательностей. Рассмотрим подробнее процедуру вычисления ДПФ с помощью полученной формулы, представленную в табл. 5.1. Номерам $k=0,...,N/2-1$ соответствует один период $N/2$-точечного ДПФ подпоследовательностей. Дальнейшие вычисления при $k=N/2,...,N-1$ соответствуют уже второму периоду $N/2$-точечного ДПФ подпоследовательностей.

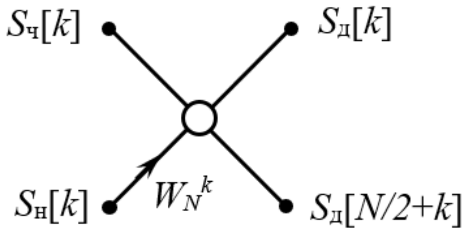

Рис.5.6. Базовая операция при БПФ

При этом значения $S_{\text{ч}}[k]$ и $S_{\text{н}}[k]$ заново вычислять нет никакой необходимости, поскольку они были вычислены на первом периоде. Таким образом значения $S_{\text{д}}[k]$ и $S_{\text{д}}[N/2+k]$ могут быть получены в единой вычислительной процедуре вида:

$$\begin{matrix}S_{\text{д}}[k]=S_{\text{ч}}[k]+W_N^kS_{\text{н}}[k]\\ S_{\text{д}}[N/2+k]=S_{\text{ч}}[k]-W_N^kS_{\text{н}}[k]\end{matrix},\quad k=0,...,N-1,\qquad (5.19)$$

сразу же, как только вычислены $S_{\text{ч}}[k]$ и $S_{\text{н}}[k]$, с выполнением только одного комплексного умножения для получения $W_N^kS_{\text{н}}[k]$, что схематично изображают как показано на рис.5.6. Ввиду внешнего сходства рассматриваемую процедуру иногда называют «бабочка».

Таблица 5.1.

Процедура вычисления ДПФ

$k=0$	$S_{д}[0]=S_{ч}[0]+W_N^0 S_{н}[0]$	Первый период N/2-точечного ДПФ
$k=1$	$S_{д}[1]=S_{ч}[1]+W_N^1 S_{н}[1]$	
$k=2$	$S_{д}[2]=S_{ч}[2]+W_N^2 S_{н}[2]$	
…	…	
$k=\frac{N}{2}-1$	$S_{д}\left[\frac{N}{2}-1\right]=S_{ч}\left[\frac{N}{2}-1\right]+W_N^{N/2-1}S_{н}\left[\frac{N}{2}-1\right]$	
$k=\frac{N}{2}$	$S_{д}\left[\frac{N}{2}\right]=S_{ч}\left[\frac{N}{2}\right]+W_N^{N/2}S_{н}\left[\frac{N}{2}\right]=$ $=S_{ч}[0]-W_N^0 S_{н}[0]$	Второй период N/2-точечного ДПФ
$k=\frac{N}{2}+1$	$S_{д}\left[\frac{N}{2}+1\right]=S_{ч}\left[\frac{N}{2}+1\right]+W_N^{N/2+1}S_{н}\left[\frac{N}{2}+1\right]=$ $=S_{ч}[1]-W_N^1 S_{н}[1]$	
$k=\frac{N}{2}+2$	$S_{д}\left[\frac{N}{2}+2\right]=S_{ч}\left[\frac{N}{2}+2\right]+W_N^{N/2+1}S_{н}\left[\frac{N}{2}+2\right]=$ $=S_{ч}[2]-W_N^2 S_{н}[2]$	
…	…	
$k=N-1$	$S_{д}[N-1]=S_{ч}[N-1]+W_N^{N-1}S_{н}[N-1]=$ $=S_{ч}\left[\frac{N}{2}-1\right]-W_N^{N/2-1}S_{н}\left[\frac{N}{2}-1\right]$	

При расчёте $N/2$ - точечных ДПФ объём алгоритмов также оказывается степенью двойки и снова может быть использован рассмотренный подход, который будет предполагать расчёт $N/4$ - точечных ДПФ и так до тех пор, пока длина подпоследовательностей не окажется равной 2.

Полные наглядные схемы алгоритма БПФ, отражающие изложенный подход, при произвольном объёме достаточно громоздки. Рассмотрим пример при $N=8=2^3$ на рис.5.7-5.9. Блок двухточечного ДПФ, показанный на рис. 5.9 формально содержит одно умножение $M_2=1$.

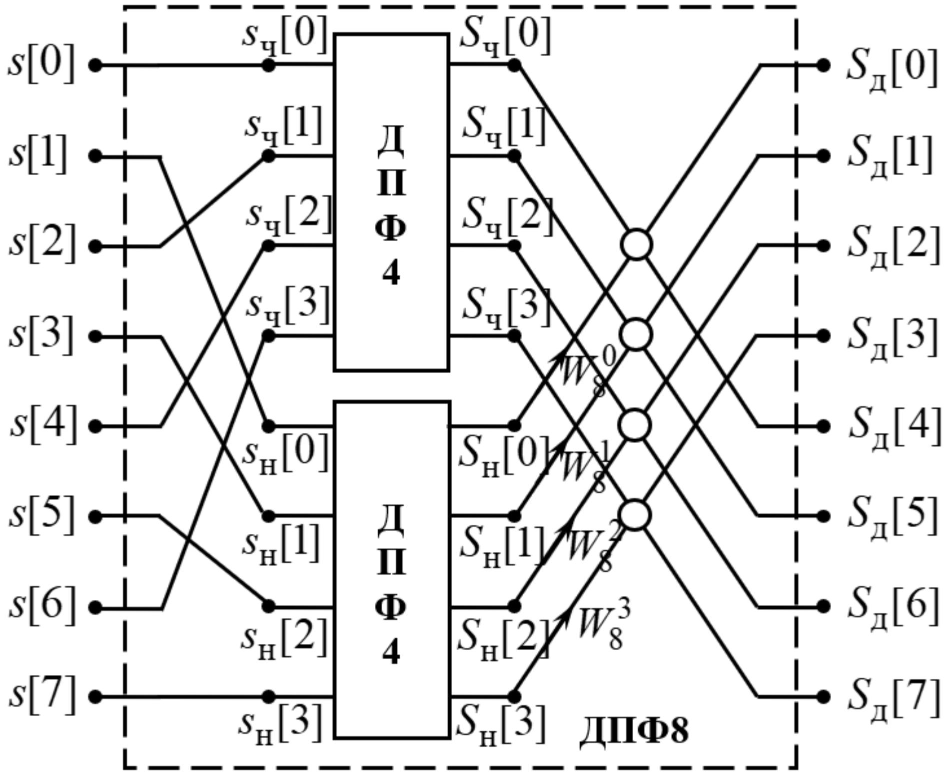

Рис.5.7. Схема алгоритма 8-ми точечного БПФ

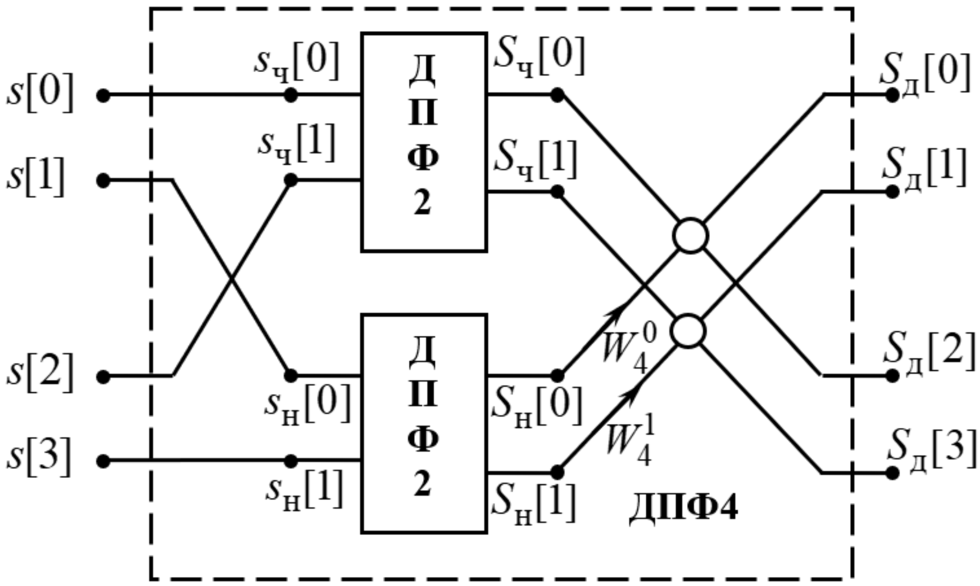

Рис.5.8. Схема алгоритма 4-х точечного БПФ

Далее 4-х точечное ДПФ на рис.5.8 содержит два блока 2-х точечных ДПФ (по M_2 умножений в каждом) и два собственных умножения $M_4 = 2M_2 + 2$.

Затем 8-ми точечное ДПФ на рис.5.7 содержит два блока 4-х точечных ДПФ (по M_4 умножений в каждом) и четыре собственных умножения $M_8 = 2M_4 + 4$.

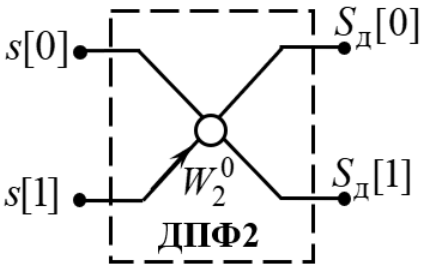

Рис.5.9. Схема двухточечного БПФ

Продолжая рассуждения для количества умножений в общем случае N-точечного ДПФ сможем записать

$$M_N = 2M_{N/2} + N/2.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что решением этого разностного уравнения является

$$M_N = \frac{N}{2}\log_2 N. \qquad (5.20)$$

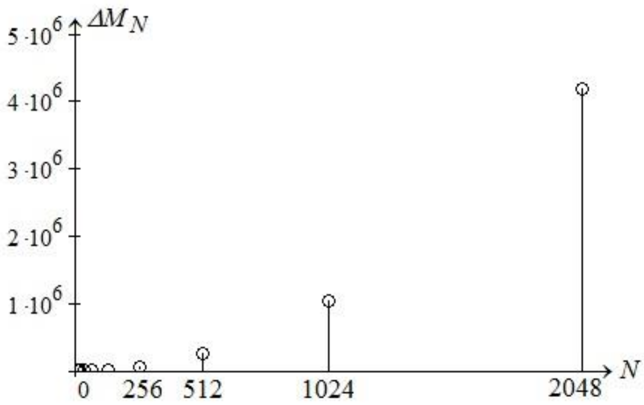

Рис.5.10. Разность количества умножений ДПФ и БПФ

На рис.5.10 показана разность количества операций умножения, требуемых при прямом расчёте ДПФ и при использовании БПФ. Уже при $N = 1024$ разница в количестве умножений достигает миллиона.

5.6. Детализация спектра при ДПФ

При цифровом спектральном анализе непосредственное сочетание скорости расчёта спектра на основе БПФ и детальности его представления оказывается затруднительным ввиду того, что ДПФ даёт отсчёты спектра сигнала, взятые с максимальным шагом. Например, ДПФ прямоугольного импульса (рис.5.11) практически не позволяет установить структуру спектра, так как содержит всего один ненулевой отсчёт.

Если имеется возможность изменить количество отсчётов в сигнале, например, увеличить их количество в два раза, то легко обнаружить, что этот приём не даст улучшение детализации спектра (рис.5.12). Действительно, в случае, когда сигнал представлен N отсчётами и дискретизирован с периодом T, ДПФ даёт отсчёты его спектра с частотным интервалом

$$\Omega = 2\pi / NT .$$

После увеличения числа отсчётов в два раза, период дискретизации соответственно уменьшиться в два раза, и для интервала дискретизации получим

$$\Omega_2 = 2\pi / 2N(T/2) = 2\pi / NT = \Omega .$$

Изменение числа отсчётов не приводит к изменению шага дискретизации спектра при ДПФ, то есть не даёт возможности более детально исследовать его структуру.

Рассмотрим ситуацию, когда к исследуемому сигналу добавляются нулевые отсчёты (рис.5.13), то есть ДПФ выполняется над последовательностью

$$\{\tilde{s}(nT)\}_{n=0}^{\tilde{N}-1} = \{s(nT)\}_{n=0}^{N-1} \cup \{0\}_{n=N}^{\tilde{N}-1} .$$

При этом

$$\tilde{\Omega} = \frac{2\pi}{\tilde{N}T} = \frac{N}{\tilde{N}}\Omega .$$

Поскольку $\tilde{N} > N$, добавление нулевых отсчётов способствует уменьшению шага дискретизации спектра.

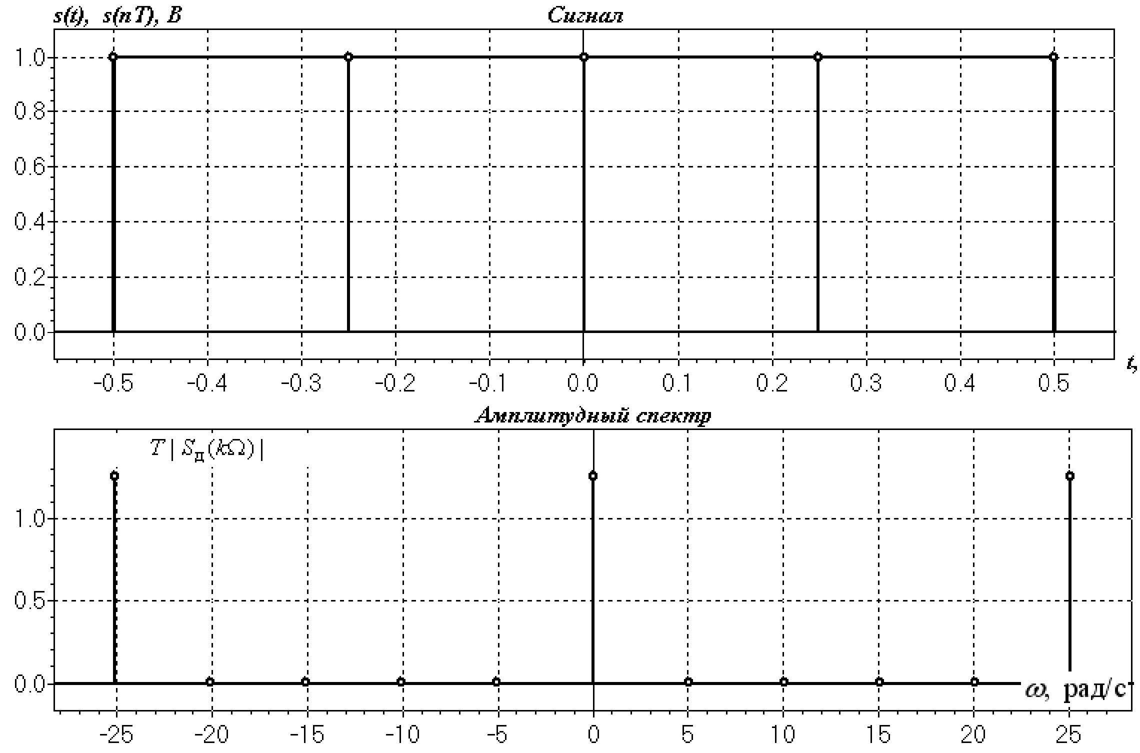

Рис.5.11. Дискретный прямоугольный импульс и его ДПФ

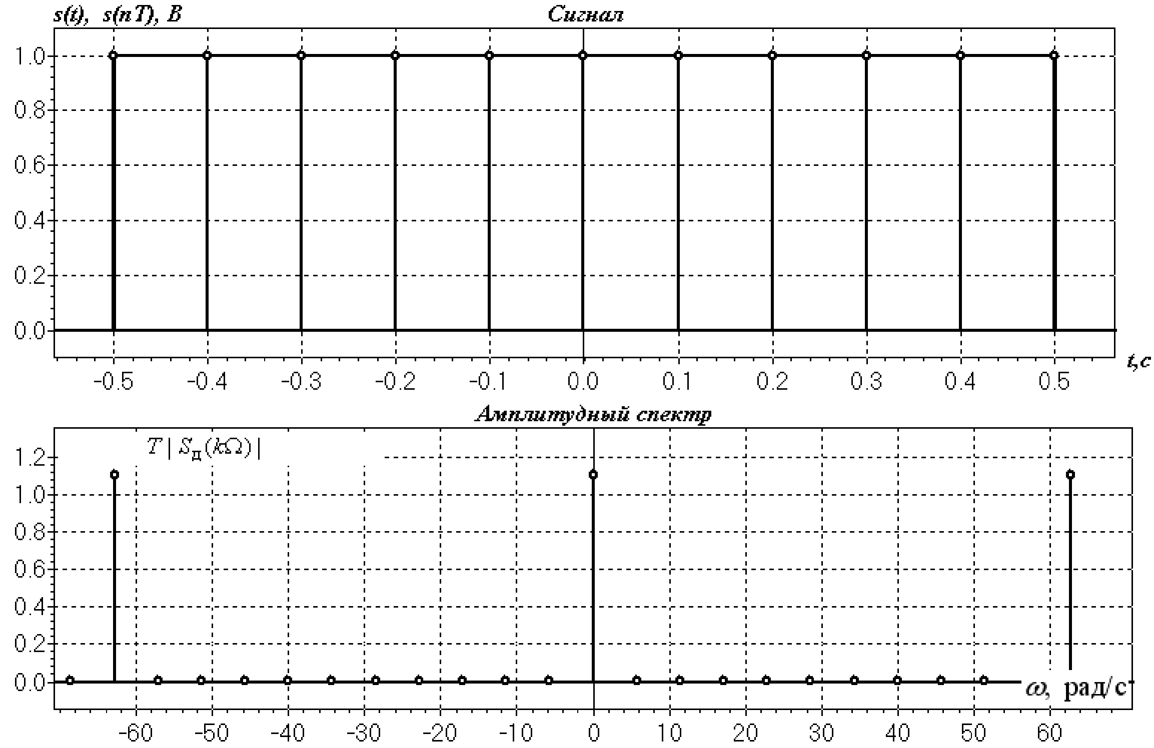

Рис.5.12. Дискретный прямоугольный импульс и его ДПФ при увеличении количества отсчётов в импульсе.

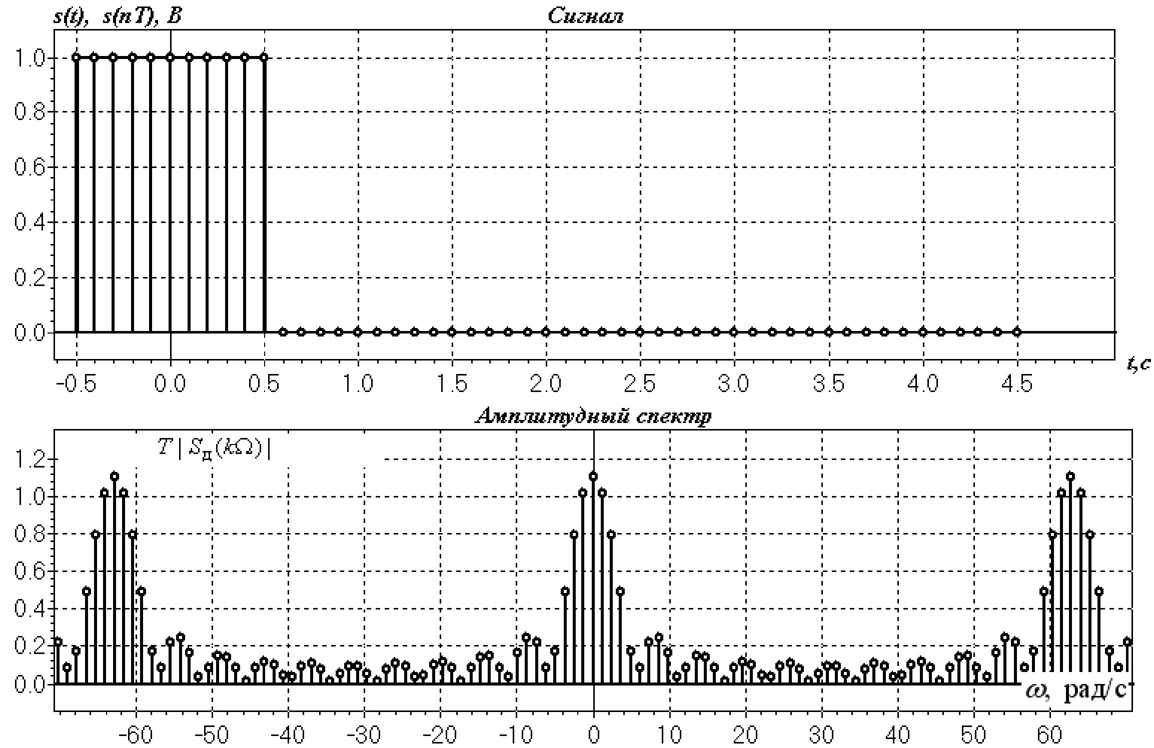

Рис.5.13. Дискретный прямоугольный импульс и его ДПФ при добавлении нулевых отсчётов

При использовании БПФ количество отсчётов в сигнале должно быть степенью двойки. Поэтому добавление нулевых отсчётов должно выполняться так чтобы общее увеличение их числа тоже было степенью двойки. Например, исходное число отсчётов в сигнале, являющееся степенью числа 2, можно увеличивать в 2^d раза

$$\tilde{N} = 2^d N .$$

Натуральный параметр d называют степенью детализации спектра. При этом

$$\tilde{\Omega} = \frac{N}{2^d N}\Omega = \frac{\Omega}{2^d}, \qquad (5.21)$$

и увеличению детализации на единицу соответствует уменьшение шага дискретизации спектра в два раза.

Требуемое количество добавляемых нулевых отсчётов:

$$N_0 = \tilde{N} - N = \left(2^d - 1\right)N , \qquad (5.22)$$

5.7. Примеры и задачи

5.7.1. Спектральная плотность дискретного экспоненциального импульса

Дискретный экспоненциальный импульс описывается выражением $s(nT) = \sigma(nT)e^{-\alpha nT}$. Временная диаграмма дискретного экспоненциального импульса показана на рис.5.14.

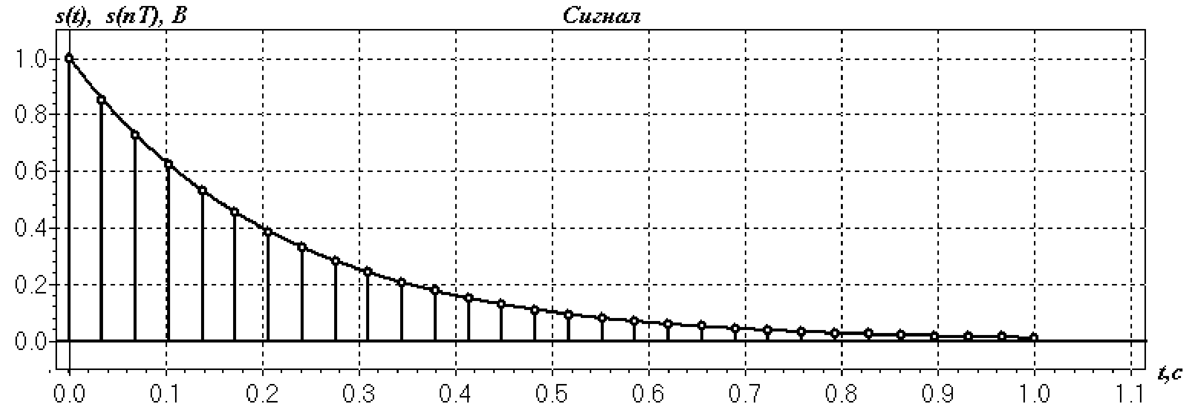

Рис.5.14. Временная диаграмма дискретного экспоненциального импульса

Выражение для Z – преобразования заданного сигнала имеет вид:

$$S(z) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T} z^{-1}} .$$

Учитывая взаимосвязь между спектральной плотностью и Z – преобразованием сигнала получим

$$S_{\text{д}}(\omega) = S(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1-e^{-\alpha T}e^{-j\omega T}} = \frac{1}{1-e^{-(\alpha+j\omega)T}}.$$

Амплитудный спектр сигнала

$$|S_{\text{д}}(\omega)| = \sqrt{S_{\text{д}}(\omega)S_{\text{д}}^{*}(\omega)} = \sqrt{\frac{1}{1-e^{-\alpha T}e^{-j\omega T}}\frac{1}{1-e^{-\alpha T}e^{j\omega T}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1-e^{-\alpha T}e^{j\omega T}-e^{-\alpha T}e^{-j\omega T}+e^{-2\alpha T}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e^{-\alpha T}\cos(\omega T)+e^{-2\alpha T}}}.$$

Фазовый спектр сигнала

$$\varphi_{\text{д}}(\omega) = \arg(S_{\text{д}}(\omega)) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{e^{-\alpha T}\sin(\omega T)}{1-e^{-\alpha T}\cos(\omega T)}\right).$$

Пример графиков амплитудного и фазового спектров показан на рис.5.15.

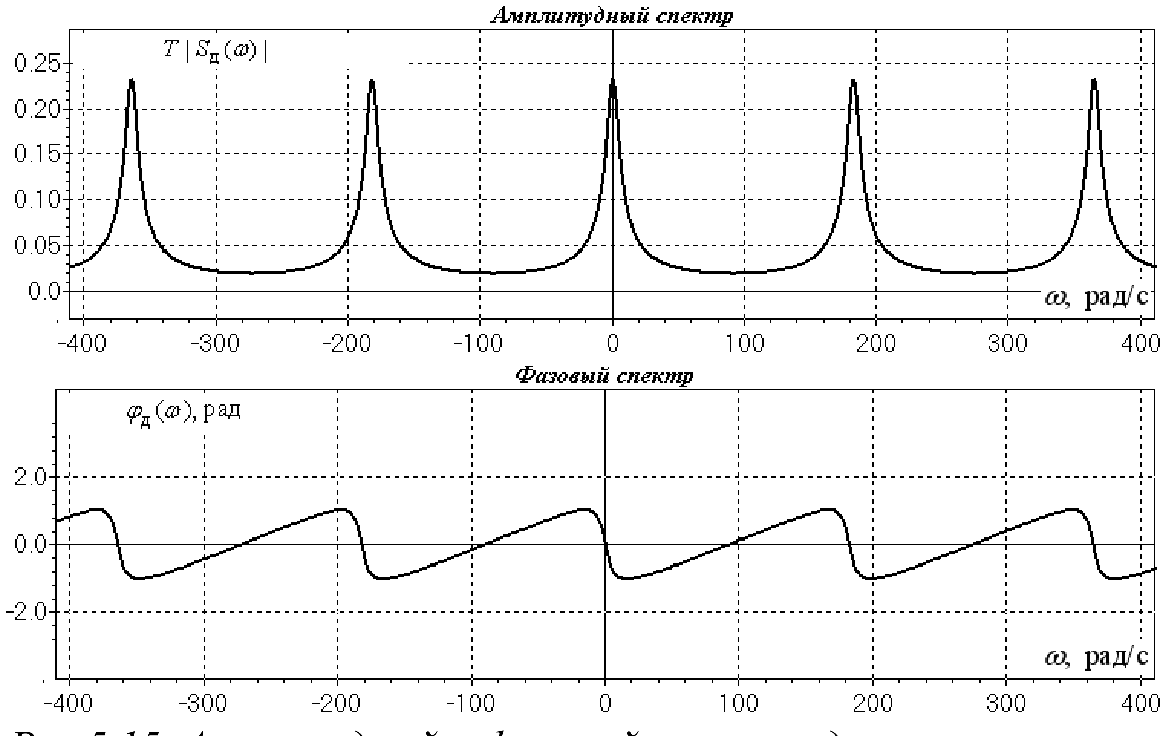

Рис.5.15. Амплитудный и фазовый спектры дискретного экспоненциального импульса

5.7.2. Спектральная плотность дискретного прямоугольного импульса

Дискретный прямоугольный импульс описывается выражением $s(nT)=1,\ 0\le n\le N-1$.

Выражение для Z – преобразования дискретного прямоугольного импульса имеет вид:

$$S(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}.$$

Учитывая связь между спектральной плотностью и Z - преобразованием дискретного сигнала, получим

$$S_{\text{д}}(\omega)=S(e^{j\omega T})=\frac{1-e^{-jN\omega T}}{1-e^{-j\omega T}}=\frac{1-e^{-jN\omega T}}{1-e^{-j\omega T}}\frac{e^{-jN\omega T/2}e^{jN\omega T/2}}{e^{-j\omega T/2}e^{j\omega T/2}}=$$

$$=\frac{2j}{2j}\frac{e^{jN\omega T/2}-e^{-jN\omega T/2}}{e^{j\omega T/2}-e^{-j\omega T/2}}\frac{e^{-jN\omega T/2}}{e^{-j\omega T/2}}=\frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}e^{-j(N-1)\omega T/2}$$

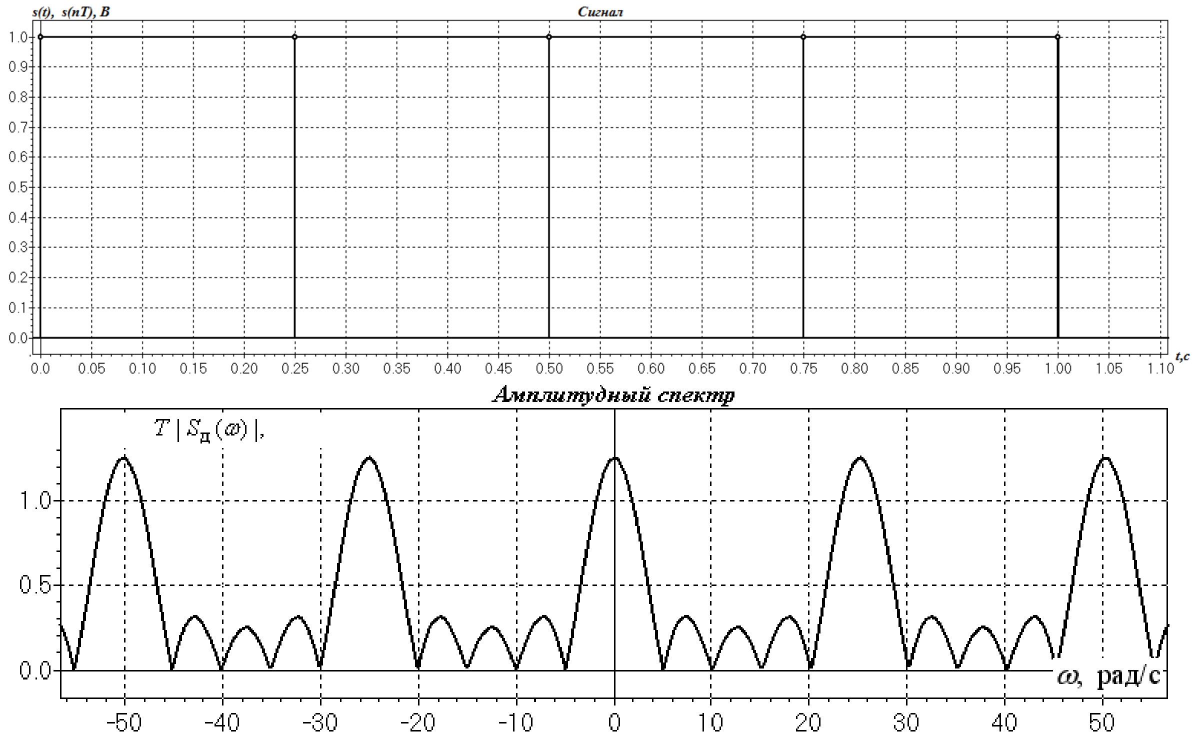

Рис.5.16. Дискретный прямоугольный импульс и его амплитудный спектр

Амплитудный спектр сигнала:

$$|S_{\text{д}}(\omega)|=\left|\frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}\right|.$$

Фазовый спектр сигнала:

$$\varphi_д(\omega)=\frac{\pi}{2}\left(1-\operatorname{sign}\left(\frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)}\right)\right)\operatorname{sign}(\omega T)-\frac{(N-1)\omega T}{2}.$$

Пример дискретного прямоугольного импульса и его амплитудного спектра при $N=5$ показан на рис.5.16.

5.7.3. ДПФ усечённого экспоненциального импульса

Усечённый экспоненциальный импульс описывается выражением

$$s[n]=\sigma[n]e^{-\alpha nT},\quad 0\le n\le N-1.$$

Выражение для Z – преобразования данного сигнала имеет вид:

$$S(z)=\frac{1-e^{-\alpha NT}z^{-N}}{1-e^{-\alpha T}z^{-1}}.$$

Используя взаимосвязь между ДПФ и Z – преобразованием, получим:

$$S_д[k]=S\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)=\frac{1-e^{-\alpha NT}e^{-j\frac{2\pi}{N}Nk}}{1-e^{-\alpha T}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}=\frac{1-e^{-\alpha NT}}{1-e^{-\alpha T}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}.$$

Дискретный амплитудный спектр сигнала:

$$\left|S_д[k]\right|=\frac{1-e^{-\alpha NT}}{\sqrt{1-2e^{-\alpha T}\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)+e^{-2\alpha T}}}.$$

Пример графика дискретного амплитудного спектра показан на рис.5.17.

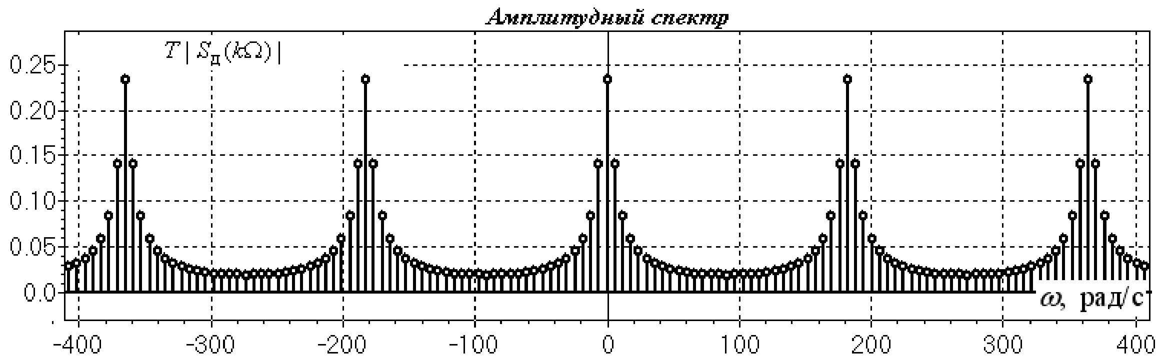

Рис.5.17. Пример дискретного амплитудного спектра усечённого экспоненциального импульса

5.7.4. ДПФ дискретного прямоугольного импульса

Дискретный прямоугольный импульс описывается выражением

$$\{s(nT)\}_{n=0}^{N-1} = \{1\}_{n=0}^{N-1}.$$

Выражение для спектральной плотности заданного сигнала имеет вид:

$$S_{\text{д}}(\omega) = \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} e^{-j(N-1)\omega T/2}.$$

ДПФ представляет собой результат дискретизации спектра дискретного сигнала с шагом $\Omega = \dfrac{2\pi}{NT}$. С учётом этого получим

$$S_{\text{д}}[k] = S_{\text{д}}(k\Omega) = \frac{\sin(Nk\Omega T/2)}{\sin(k\Omega T/2)} e^{-j(N-1)k\Omega T/2} =$$

$$= \frac{\sin(Nk2\pi/2N)}{\sin(k2\pi/2N)} e^{-j(N-1)k2\pi/2N} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin(k\pi/N)} e^{-j(N-1)k\pi/N} =$$

$$= N \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta[k - iN].$$

Пример дискретного амплитудного спектра для $N = 11$ показан на рис.5.18.

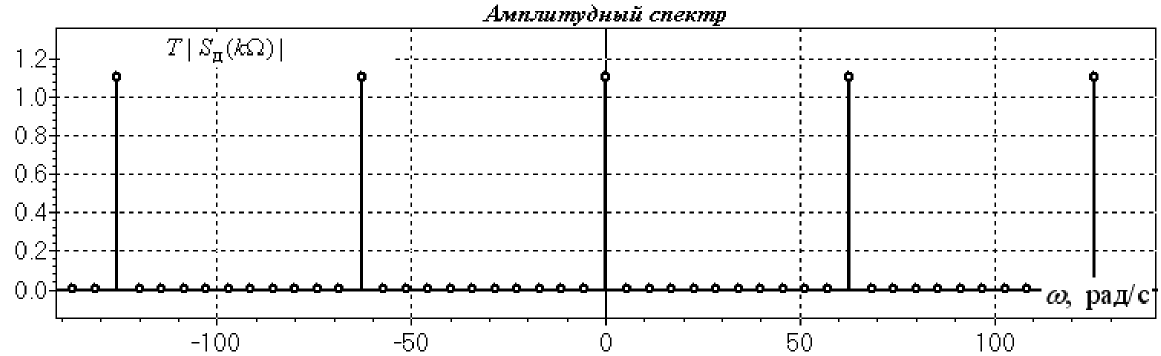

Рис.5.18. Пример дискретного амплитудного спектра прямоугольного импульса