

3. Дискретное представление аналоговых сигналов

3.1. Условие восстановления аналогового сигнала

Рассмотрим спектр дискретного сигнала, соответствующего аналоговому сигналу со спектром ограниченным частотой ω_m , при различном выборе частоты дискретизации (рис.3.1).

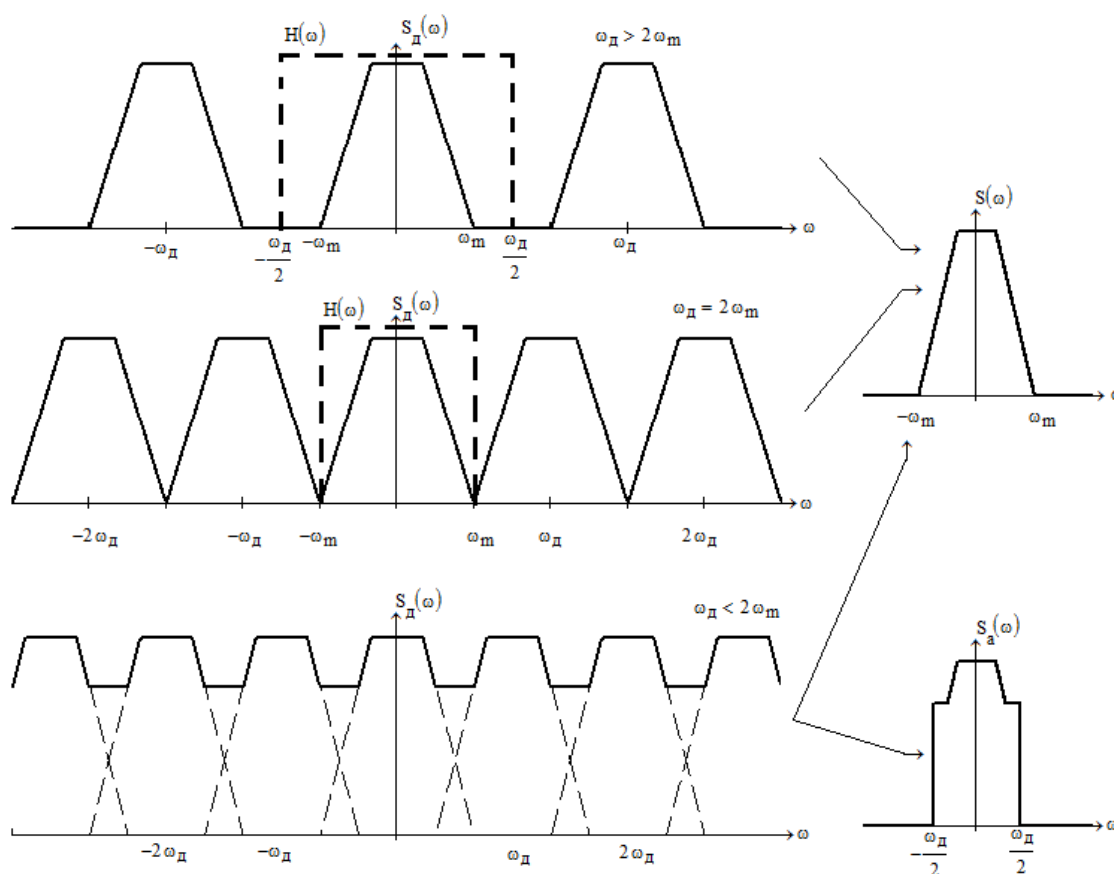


Рис.3.1. Спектр дискретного сигнала при различном выборе частоты дискретизации

Здесь и в дальнейшем ограниченность спектра $S(\omega)$ означает, что существует такое значение $\omega_m > 0$, что $S(\omega)|_{\omega \geq \omega_m} = 0$.

В случае, когда $\omega_d \geq 2\omega_m$ периодически повторяющиеся копии спектра аналогового сигнала не накладываются друг на друга, и можно указать способ преобразования дискретного сигнала в аналоговый, предполагающий низкочастотную фильтрацию с выделением из спектра дискретного сигнала спектра аналогового сигнала. Теоретически в качестве восстанавливающего фильтра можно рассматривать и идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ), комплексная частотная характеристика $H(\omega)$ которого показана

на рис.3.1 пунктиром.

В случае, когда $\omega_d < 2\omega_m$ периодически повторяющиеся копии спектра аналогового сигнала накладываются друг на друга, что делает восстановление аналогового сигнала принципиально невозможным, поскольку спектр дискретного сигнала $S_d(\omega)$ теперь может быть получен не только путём наложения периодически повторяющихся копий спектра исходного аналогового сигнала (показаны пунктиром на рис.3.1), но и, например, путём повторения «встык» копий спектра некоторого альтернативного вида $S_a(\omega)$, соответствующего другому сигналу. Это означает, что возникает неопределённость, связанная с выбором той или иной альтернативы.

Таким образом, для восстановления сигнала с ограниченным спектром по его дискретным значениям при дискретизации необходимо выполнение следующих эквивалентных условий:

$$\begin{aligned} \omega_d &\geq 2\omega_m; f_d \geq 2f_m; \\ T &\leq \frac{\pi}{\omega_m}; T \leq \frac{1}{2f_m}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Эффект искажения спектра исходного сигнала при дискретизации называется эффектом наложения в частотной области.

Сигнал с ограниченным спектром имеет бесконечную протяжённость, вследствие чего является физически нереализуемым. Физически реализуемые же сигналы имеют конечную длительность и неограниченный, но убывающий спектр. Поэтому при дискретизации сигналов ω_m является границей полосы частот, в которой локализована основная часть спектра сигнала и определяется условно, например, по амплитудному критерию. При этом эффект наложения принципиально не может быть исключён, а выбор максимальной частоты спектра ω_m определяет точность, с которой может быть восстановлен аналоговый сигнал. Сигнал с неограниченным спектром может быть восстановлен только с той или иной степенью точности.

В большинстве случаев, искажения основной части спектра, обусловленные эффектом наложения, крайне нежелательны, поэтому, исходя из выбора максимальной частоты спектра, предварительно осуществляют низкочастотную фильтрацию сигнала с

целью минимизации наложения после дискретизации. При этом, разумеется, сигнал также искажается ввиду подавления «хвоста» спектра, а указанный подход позволяет «разменять» искажения в области основной части спектра, на искажения, обусловленные подавлением «хвоста», конечно в том случае, когда это приемлемо.

3.2. Идеальный фильтр нижних частот

Идеальным фильтром нижних частот называется линейная цепь с комплексной частотной характеристикой (КЧХ) вида

$$H(\omega) = H_0 \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right), \quad (3.2)$$

где H_0 значения КЧХ в нуле, ω_c - частота среза.

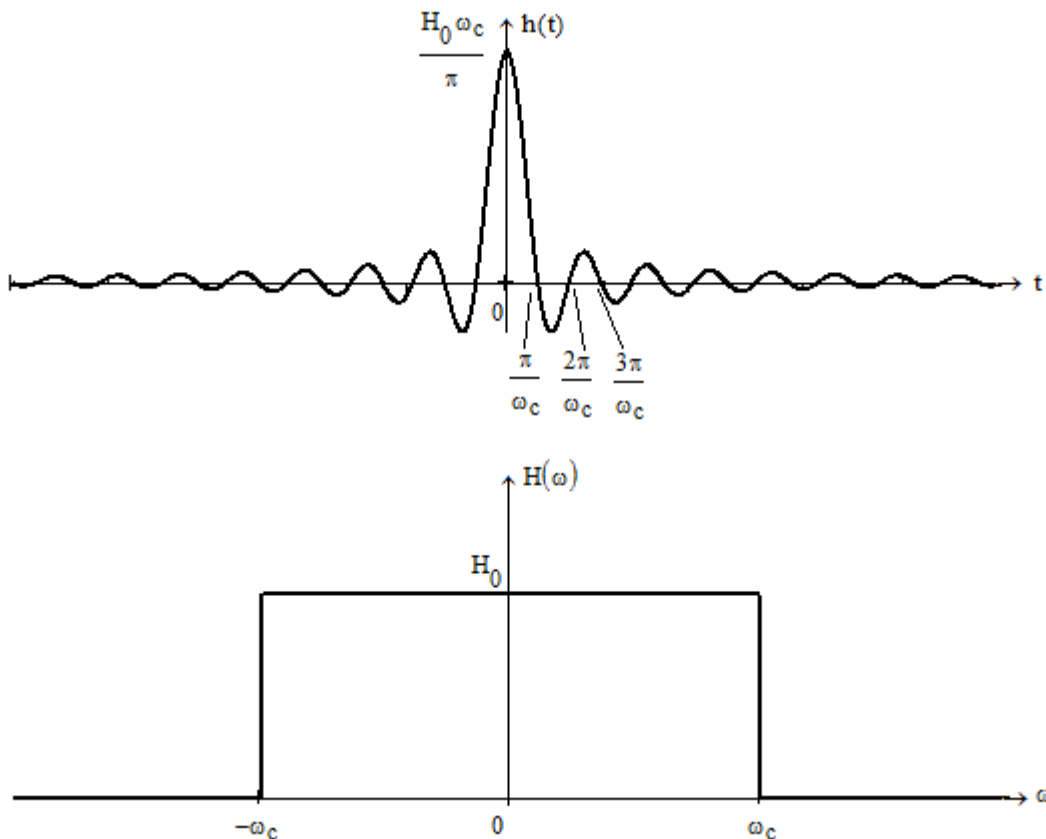


Рис.3.2. Импульсная и комплексная частотная характеристики идеального фильтра нижних частот

Идеальный фильтр нижних частот прозрачен для гармонических сигналов с частотой меньше частоты среза и полностью подавляет гармонические сигналы с частотой больше частоты среза (рис.3.2).

Импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот найдём как обратное преобразование Фурье от его КЧХ:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= F^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} H_0 e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi jt} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} H_0 e^{j\omega t} dj\omega t = \frac{H_0 e^{j\omega t}}{2\pi jt} \Big|_{-\omega_c}^{+\omega_c} = \frac{H_0}{\pi t} \left(\frac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2j} \right) = \\
 &= \frac{H_0 \omega_c \sin(\omega_c t)}{\pi \omega_c t} = \frac{H_0 \omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t).
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

(При выводе результата в (3.3) рассмотрение тривиального случая $\omega = 0$ опущено и легко может быть проделано читателем самостоятельно.)

График импульсной характеристики (3.3) показан на рис.3.2. Импульсная характеристика идеального ФНЧ не удовлетворяет условиям физической реализуемости цепи, поскольку отличается от нуля при отрицательных значениях временного аргумента, то есть идеальный ФНЧ является физически нереализуемой цепью, что, впрочем, не мешает его рассматривать теоретически, имея ввиду, что на практике могут быть реализованы цепи, лишь приближающиеся по своим свойствам к идеальной.

3.3. Теорема Котельникова

Теорема (Котельникова): Сигнал $s(t)$ со спектром $S(\omega)$, ограниченным частотой ω_m , полностью определяется своими отсчётами $\{s(nT)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, взятыми с интервалом $T \leq \frac{\pi}{\omega_m}$ и может

быть представлен рядом Котельникова

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right). \quad (3.4)$$

Доказательство

При выполнении условий теоремы аналоговый сигнал может быть получен из дискретного путём низкочастотной фильтрации. Будем рассматривать в качестве фильтра идеальный фильтр нижних частот. Поскольку в составе спектра дискретного

сигнала присутствует копия спектра аналогового сигнала с коэффициентом $\frac{1}{T}$, то для его компенсации выберем параметр идеального ФНЧ $H_0 = T$. Частоту среза фильтра выберем равной $\omega_c = \frac{\omega_d}{2}$. Такая настройка фильтра обеспечивает получение на выходе фильтра исходного аналогового сигнала (см. рис.3.1). Импульсная характеристика ФНЧ в соответствии с (3.3) описывается выражением:

$$h(t) = \frac{H_0 \omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t) = \frac{T \omega_d}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_d}{2} t\right) = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T} t\right). \quad (3.5)$$

Анализ преобразования дискретного сигнала ФНЧ наглядно даётся на рис.3.3.

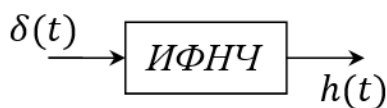


Рис.3.3.а

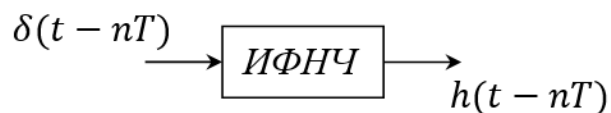


Рис.3.3.б

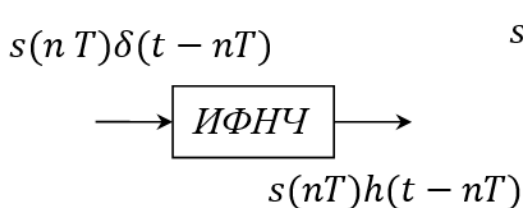


Рис.3.3.в

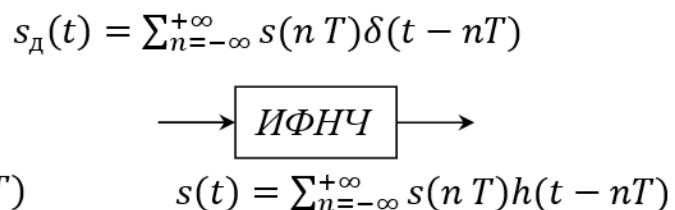


Рис.3.3.г

При воздействии на вход ФНЧ дельта – импульса на выходе получим импульсную характеристику фильтра (см. рис.3.3.а). Если дельта-импульс воздействует с опережением/запаздыванием, то и реакция на него, будет соответствующим образом сдвигаться вдоль оси времени (см. рис.3.3.б). Если на вход ФНЧ будет воздействовать дельта-импульс с коэффициентом $s(nT)$, то и реакция на него в соответствии с принципом суперпозиции будет иметь такой же коэффициент (см. рис.3.3.в). И, наконец, если на вход ФНЧ будет действовать дискретный сигнал в виде (2.4), то в соответствии с принципом суперпозиции на выходе будем иметь

сигнал (рис.3.3.г) вида
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT)h(t - nT).$$

Подставив в выражение для сигнала на выходе идеального

ФНЧ выражение для импульсной характеристики (3.5), получим ряд Котельникова (3.4), что и завершает доказательство.

3.4. Некоторые свойства сигналов с ограниченным спектром

Обсудим теорему Котельникова (3.4) и отметим некоторые свойства сигналов с ограниченным спектром (иначе называемых финитными). Будем полагать, что период дискретизации T выбран в соответствии с теоремой Котельникова.

3.4.1. Базис пространства сигналов с ограниченным спектром

Ряд Котельникова даёт разложение сигнала с ограниченным спектром по системе ортогональных на \mathbb{R} функций (называемых также функциями Котельникова)

$$\varphi_n(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right) = \varphi_0(t - nT), \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots \quad (3.6)$$

Чтобы убедиться в этом, учтём, что спектральная плотность каждой функции (3.6) равна (см. (3.2)-(3.3))

$$\Phi_n(\omega) = T \text{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) e^{-j\omega nT}, \quad (3.7)$$

и рассмотрим скалярное произведение привлекая равенство Парсеваля:

$$\begin{aligned} (\varphi_n, \varphi_k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t) \varphi_k(t) dt = \frac{1}{2\pi} (\Phi_n, \Phi_k) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(\omega) \Phi_k^*(\omega) d\omega = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\omega_d/2}^{+\omega_d/2} e^{j(k-n)\omega T} d\omega = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T, & k = n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из (3.8) также видно, что $\|\varphi_k\|^2 = T$. Поскольку любой сигнал с ограниченным спектром представляется рядом Котельникова, то рассматриваемая система функций полна и является ортогональным базисом пространства сигналов с ограниченным спектром. Особенностью этого базиса является то, что координатами в нём являются отсчёты сигнала.

Сигнал с ограниченным спектром, таким образом, может быть «сконструирован» путём наложения базисных функций Котельникова, с коэффициентами, равными его отсчётам. Базисные

функции Котельникова могут быть получены из базисной функции $\varphi_0(t)$ путём её сдвига на соответствующее число периодов дискретизации.

Заметим тут же, что система функций Котельникова ортогональна, например, и в пространстве сигналов с ограниченной энергией и неограниченным спектром, но не полна в нём и не является базисом.

3.4.2. Коэффициент взаимной корреляции и энергия сигналов с ограниченным спектром

Рассмотрим два сигнала с ограниченным квадратично-интегрируемым спектром. Возьмём их отсчёты на одной и той же равномерной сетке дискретизации, выбирая период дискретизации так, чтобы каждый из сигналов мог быть представлен рядом Котельникова:

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_1(nT)\varphi_n(t)$$

$$s_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_2(kT)\varphi_k(t).$$

Коэффициент взаимной корреляции этих сигналов:

$$R_{s_1, s_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_1(nT)\varphi_n(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_2^*(kT)\varphi_k(t)dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(nT)s_2^*(kT) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(t)\varphi_k(t)dt.$$

Привлекая (3.8) окончательно получим:

$$R_{s_1 s_2} = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_1(nT)s_2^*(nT). \quad (3.9)$$

В случае $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$ (3.9) даёт энергию сигнала:

$$E = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(nT)|^2. \quad (3.10)$$

Таким образом, для произвольного набора чисел, обладающих

свойством $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(nT)|^2 < \infty$, существует такой сигнал с ограниченным спектром, описываемый рядом Котельникова, что эти числа являются его отсчётами.

3.4.3. Неограниченность во времени сигнала с ограниченным спектром

Сигнал с ограниченным спектром принципиально неограничен во времени. Действительно, представив сигнал через обратное преобразование Фурье, раскладывая в сходящийся степенной ряд экспоненту под интегралом и почленно интегрируя (что допустимо ввиду конечности пределов интегрирования и сходимости ряда под интегралом), получим представление сигнала в виде степенного ряда:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(\omega) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j\omega t)^k}{k!} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j^k t^k}{k!} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \omega^k S(\omega) d\omega = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k, \end{aligned}$$

что означает аналитичность $s(t)$. Как известно из теории функций комплексного переменного, равенство нулю аналитической функции на каком-нибудь конечном интервале означает её тождественность нулю. Следовательно, если бы сигнал с ограниченным спектром оказался ограниченным во времени, например, становился бы равным нулю, начиная с какого-либо момента времени, то он был бы равен нулю и во все остальные моменты времени.

Ввиду неограниченности во времени сигнал с ограниченным спектром физически нереализуем.

3.4.4. Выражение спектральной плотности финитного сигнала через его отсчёты

Представив сигнал рядом Котельникова, рассмотрим его преобразование Фурье и, привлекая свойства линейности и опережения/запаздывания, его спектральную плотность выразим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 S(\omega) &= F \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{T} (t - nT) \right) \right\} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) F \left\{ \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi}{T} (t - nT) \right) \right\} = \\
 &= T \operatorname{rect} \left(\frac{\omega}{2\pi/T} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) e^{-j\omega nT}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Спектральная плотность сигнала определяется через его отсчёты. Структурно выражение (3.11) можно разделить на два множителя. Первый множитель представляет собой прямоугольную функцию, соответствующую интервалу $[-\pi/T, \pi/T]$. Второй – ряд Фурье в комплексной форме, с коэффициентами $s(nT)$ и параметрами масштаба комплексных гармоник nT , соответствующий периодической функции частоты с периодом $\frac{2\pi}{T}$. Сочетание сомножителей соответствует выделению одного периода ряда. При корректной дискретизации $\omega_m \leq \frac{\pi}{T}$ и (3.11) можно переписать в виде:

$$S(\omega) = T \operatorname{rect} \left(\frac{\omega}{2\omega_m} \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) e^{-j\omega nT} . \tag{3.12}$$

3.4.4. Геометрическая непредсказуемость сигнала с ограниченным спектром

Сигнал с ограниченным спектром внутри любого интервала дискретизации может вести себя произвольным образом.

Это свойство финитных сигналов рассмотрим на примере. На рис.3.4 окружностями обведены точки с абсциссами nT и ординатами $s(nT)$. Внутри некоторого интервала дискретизации, например $[T, 2T]$, добавлены несколько точек, обведённых квадратами с координатами (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, M$.

Найдём сигнал с ограниченным спектром, график которого проходит через точки с координатами $(kT, s(kT))$, $k = 0, \dots, N$ и (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, M$. Для этого представив сигнал рядом Котельни-

кова $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \varphi_n(t)$, где C_n - искомые коэффициенты ряда, $\varphi_n(t)$ - функции Котельникова, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда:

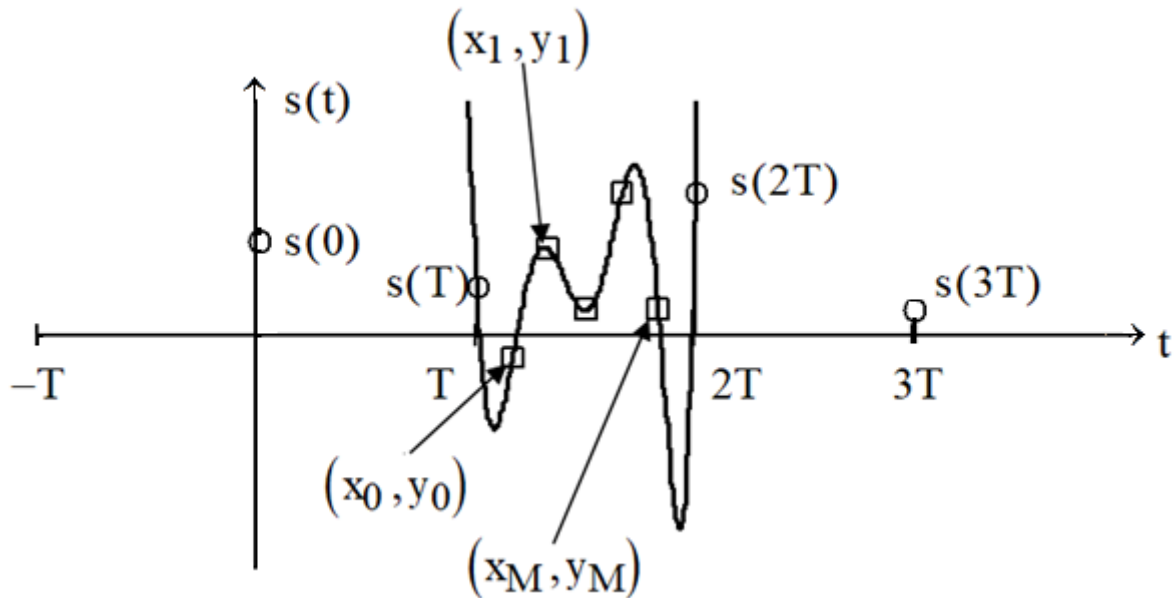


Рис.3.4. Геометрическая непредсказуемость сигнала с ограниченным спектром

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \varphi_n(kT) = s(kT), \quad k = 0, \dots, N$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \varphi_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, M$$

В общем случае решение этой системы неоднозначно, то есть сигнал, удовлетворяющий наложенным условиям не единственен. Учитывая, что нас интересует любой пример, положив отличными от нуля только коэффициенты с индексами $n = 0, \dots, N + M + 2$, придём к системе, в которой количество уравнений совпадает с количеством неизвестных:

$$\sum_{n=0}^{N+M+2} C_n \varphi_n(kT) = s(kT), \quad k = 0, \dots, N$$

$$\sum_{n=0}^{N+M+2} C_n \varphi_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, M.$$

Решая эту систему (очевидно $C_n = s(nT), n = 0, \dots, N$ и оста-

ётся найти только $C_n, n = N + 1, \dots, N + M + 2$), получим сигнал, график которого проходит через заданный набор точек, в том числе ведёт себя на выбранном периоде дискретизации соответственно произвольно задаваемым точкам $(x_i, y_i), i = 0, \dots, M$, а значение максимальной частоты спектра не накладывает никаких ограничений на указанное поведение. (Разумеется отдельного исследования требует главный определитель системы, но этот вопрос здесь не будем затрагивать).

Рассмотренное свойство в более общем плане выражается теоремой Агеева, утверждающей, что при произвольной зафиксированной максимальной частоте спектра ω_m существует сигнал с ограниченным ω_m спектром, который на любом конечном интервале приближает произвольный непрерывный сигнал сколько угодно точно. Это утверждение оставим без доказательства.

3.6. Интерполяция сигналов с неограниченным спектром рядом Котельникова

При восстановлении (интерполяции) аналогового сигнала с неограниченным спектром всегда имеет место неопределённость. Использование ряда Котельникова в этих условиях может рассматриваться лишь как источник одной из альтернатив и определяет сигнал с ограниченным спектром, отсчёты которого совпадают с отсчётами исходного сигнала. В остальные моменты времени указанные сигналы могут отличаться друг от друга. Ошибка восстановления сигнала при этом в большинстве случаев тем меньше, чем большей была выбрана условная максимальная частота в спектре сигнала при его дискретизации.

Скорость убывания спектра аналогового сигнала определяется его степенью гладкости (количеством существующих в классическом смысле производных) r – то есть количеством последовательных дифференцирований сигнала до появления результата, содержащего хотя бы один разрыв. Асимптотически спектральная плотность убывает по закону $\frac{1}{\omega^{r+1}}$. Например, для прямоугольного или экспоненциального импульсов $r = 0$, для

симметричного треугольного $r = 1$, для гауссовского $r = \infty$.

В наиболее худших условиях находятся сигналы с разрывами, поскольку для них $r = 0$ и убывание их спектра асимптотически обратно пропорционально частоте, что является самым медленным убыванием. При их приближении рядом Котельникова отличия исходного сигнала от приближающего имеют характер пульсаций, а в местах разрыва появляются выбросы величиной приблизительно 10-25% от величины разрыва, причём размах пульсаций не уменьшается при уменьшении периода дискретизации. Это явление аналогично эффекту Гиббса, поскольку обусловлено «грубым» вырезанием с образованием ступеньки фрагмента спектра аналогового сигнала из спектра дискретного сигнала идеальным ФНЧ, как это видно из рис.3.1 в условиях наложения.

Пример приближения экспоненциального импульса рядом Котельникова показан на рис.3.5.

При восстановлении сигналов с $r > 0$ выбором максимальной частоты в спектре сигнала и уменьшением периода дискретизации можно добиться приемлемой точности приближения аналогового сигнала рядом Котельникова, однако следует помнить, что ошибка принципиально неизбежна.

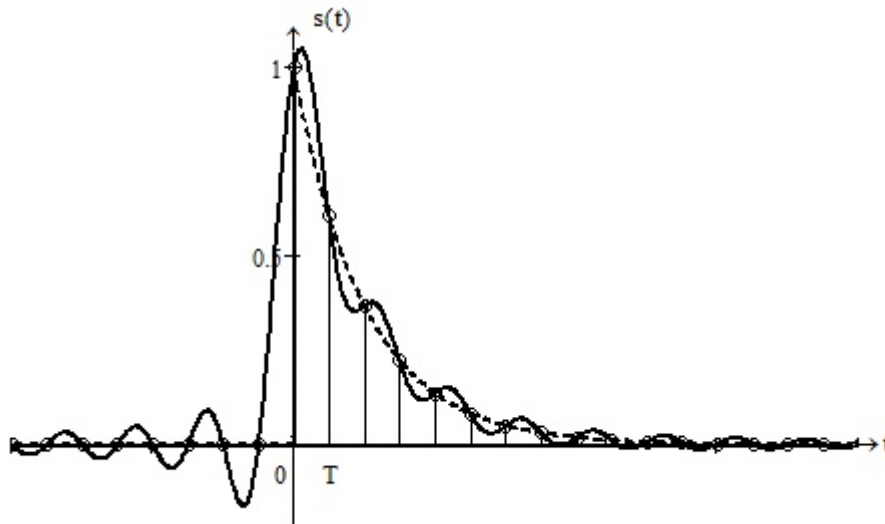


Рис.3.5. Приближение экспоненциального импульса рядом Котельникова

Качество приближения сигнала $s(t)$ с неограниченным спектром $S(\omega)$ на основе интерполяции рядом Котельникова по его отсчётам можно оценить, рассматривая энергию разностного

сигнала.

Обозначим:

$\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t-nT)\right)$ - интерполирующая функция;

$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$ - энергия приближаемого сигнала;

$E_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(nT)|^2$ - энергия интерполирующей функции;

$s_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ - сигнал, получаемый из исходного при

ограничении спектра (сигнал на выходе идеального ФНЧ при воздействии на него приближаемого сигнала). «о» - ограничение спектра;

$\omega_m = \frac{\pi}{T}$ - максимальная частота в спектре интерполирующей функции.

С учётом (3.12), а также привлекая равенство Парсеваля, для энергии разностного сигнала запишем:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t) - \psi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt + 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \psi^*(t) dt = \\ &= E_s + E_\psi - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \Psi^*(\omega) d\omega = \\ &= E_s + E_\psi - \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} S(\omega) T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s^*(nT) e^{j\omega nT} d\omega = \\ &= E_s + E_\psi - 2 \operatorname{Re} T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s^*(nT) \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{+\omega_m} S(\omega) e^{j\omega nT} d\omega = \\ &= E_s + E_\psi - 2 \operatorname{Re} T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s^*(nT) s_o(nT). \end{aligned}$$

Выражение $R_{s_o, \psi} = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_o(nT) s^*(nT)$ представляет собой коэф-

фициент взаимной корреляции интерполирующей функции и сигнала получаемого дискретизацией сигнала с усечённым спектром, соответствующего приближаемому. Таким образом

$$\varepsilon = E_s + E_\psi - 2\operatorname{Re}R_{s_o,\psi}. \quad (3.13)$$

Непосредственные расчёты по формуле (3.13) затруднены поскольку в большинстве случаев потребуют численного интегрирования для получения отсчётов $s_o(nT)$. Для оценочных расчётов в случае, когда ω_m соответствует ограничению спектра сигнала по уровню ниже 3-5% от максимума, можно приближённо положить $R_{s_o,\psi} \approx E_\psi$ и

$$\varepsilon \approx E_s - E_\psi.$$