

1. Понятие дискретного сигнала. Цифровая обработка сигналов

1.1. Введение

Обработка сигналов в простейшем случае включает частотную фильтрацию (осуществляется линейными цепями), преобразование частоты, демодуляцию (осуществляются параметрическими и нелинейными цепями). Обобщённо можно считать, что устройство обработки сигналов (УОС) ставит в соответствие входному сигналу некоторый выходной сигнал (см. рис.1.1).

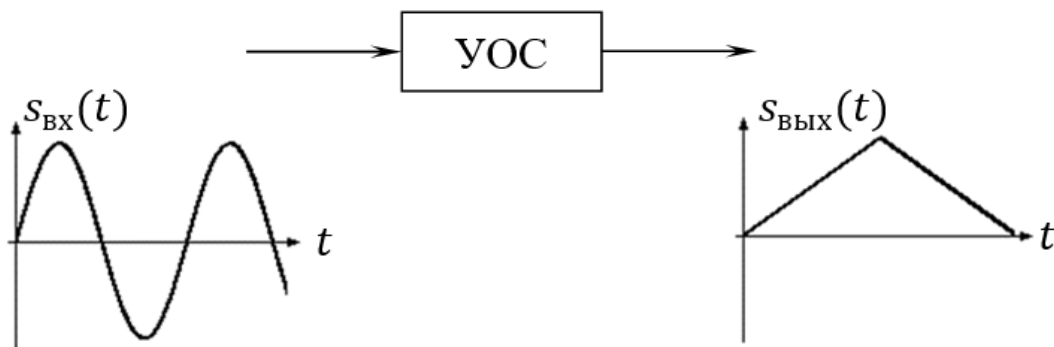


Рис.1.1. Обработка сигналов

Часто при заданном алгоритме обработки техническая реализация УОС оказывается сложной задачей, устройства могут получаться громоздкими, возникают проблемы с согласованием отдельных каскадов, изменение алгоритма обработки сигналов потребует изменения структуры устройства. Указанных трудностей можно избежать, если перейти к цифровой обработке сигналов (рис.1.2).

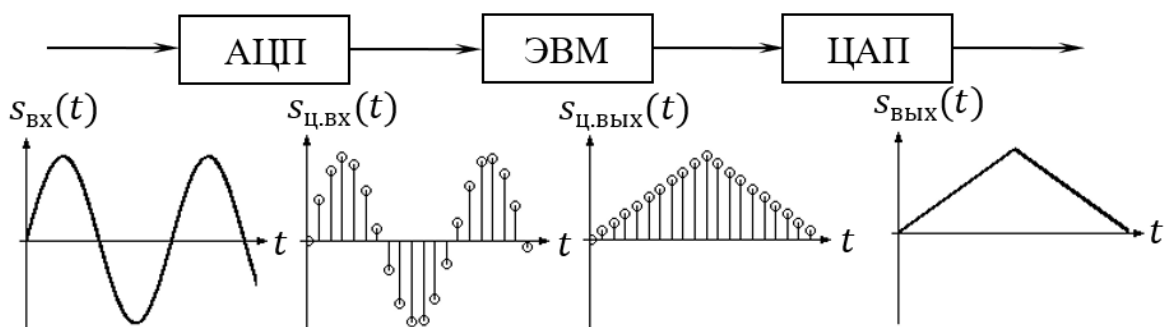


Рис.1.2. Цифровая обработка сигналов

При этом аналоговый сигнал преобразуется в соответствующий ему цифровой, который обрабатывается с помощью элект-

тронно-вычислительной машины (ЭВМ). После реализации того или иного алгоритма обработки на ЭВМ цифровой сигнал преобразуется в аналоговый, однако могут быть и случаи, когда такого преобразования не требуется: ЭВМ принимает некоторое решение по результатам обработки сигнала и формирует соответствующие команды управления сразу в цифровом виде.

УОС оказывается универсальным: для изменения алгоритма обработки сигналов достаточно изменить программу ЭВМ. Кроме того расширяются возможности по реализации разнообразных алгоритмов.

Ориентируясь на общий, случай мы будем рассматривать цифровые сигналы во взаимосвязи с соответствующими аналоговыми, в связи с чем нам предстоит изучить ряд важных вопросов:

1. Каким образом можно осуществить переход от аналогового к цифровому сигналу;
2. Каким образом можно осуществить переход от цифрового сигнала к аналоговому;
3. Некоторые алгоритмы цифровой обработки сигналов.

1.2. Классификация сигналов. Основные термины и определения

Примеры временных диаграмм рассматриваемых сигналов приведены на рис.1.2.

Непрерывным (аналоговым) сигналом $s(t)$ называется сигнал, который в любой момент времени может принимать произвольные значения из некоторой области допустимых значений на \mathbb{R} .

Дискретным называется сигнал $s_d(t)$, который может быть отличен от нуля только в определённые моменты времени и может принимать произвольные значения из некоторой области допустимых значений на \mathbb{R} .

Квантованным называется сигнал $s_{кв}(t)$, который может быть отличен от нуля в любой момент времени и может принимать только определённые значения на \mathbb{R} .

Дискретный квантованный сигнал $s_{ц}(t)$ называется цифровым.

В более общем случае могут рассматриваться комплексные

сигналы, их допустимые значения или области допустимых значений могут располагаться на комплексной плоскости \mathbb{C} .

В большинстве случаев сигналы, подлежащие обработке, являются непрерывными. Переход от непрерывного сигнала

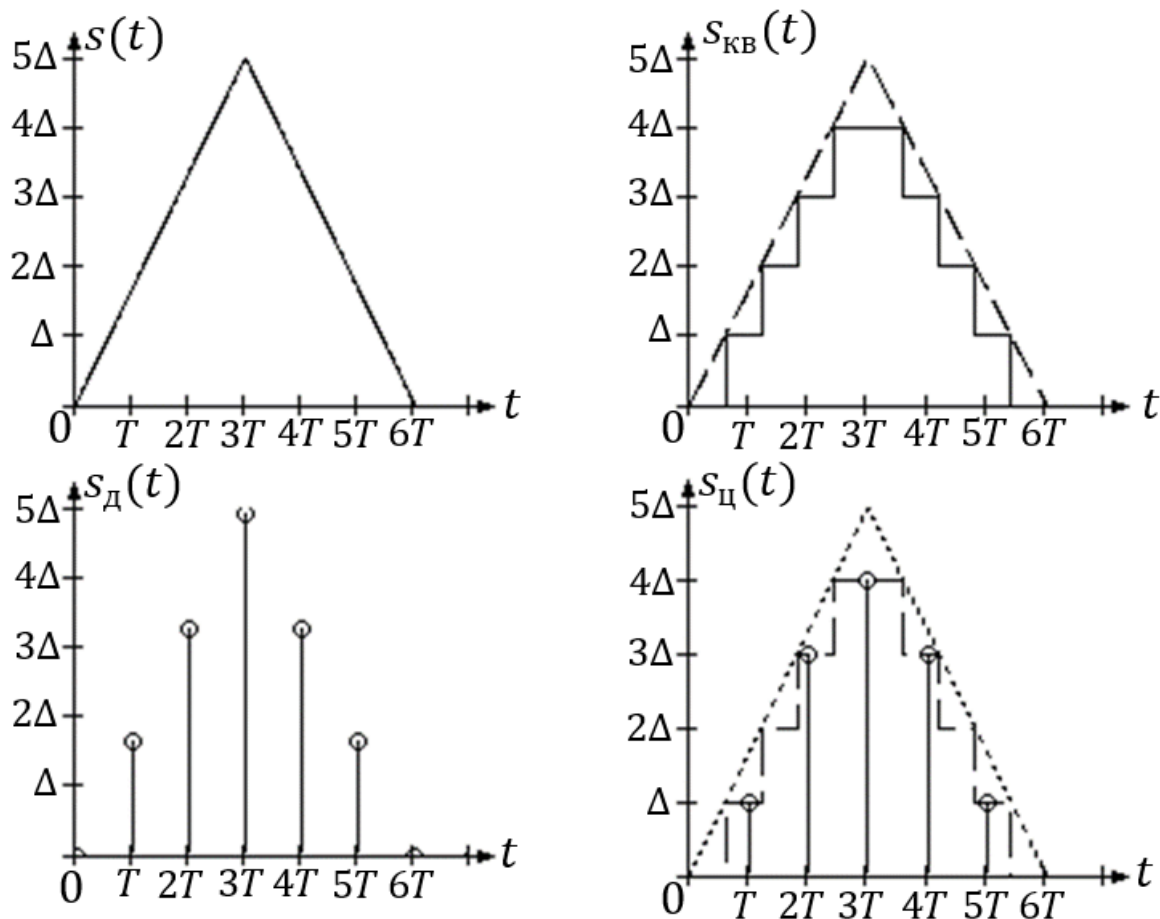


Рис. 1.3. Аналоговый, квантованный, дискретный и цифровой сигналы

к цифровому и последующая его цифровая обработка являются удобным техническим решением, позволяющим реализовать различные алгоритмы обработки сигналов, в том числе и те, реализация которых невозможна на аналоговой аппаратуре. После обработки сигнала может потребоваться его преобразование в аналоговую форму. В связи с этим дискретные, квантованные и цифровые сигналы обычно рассматриваются во взаимосвязи с соответствующими им аналоговыми сигналами.

Переход от непрерывного сигнала к дискретному называется дискретизацией. Дискретный сигнал представляет собой упорядоченную во времени совокупность мгновенных значений непрерывного сигнала, взятых с равномерным шагом. Мгновенные

значения непрерывного сигнала называются выборками или отсчётами. Равномерность взятия отсчётов аналогового сигнала обусловлена простотой технической реализации устройств ЦОС. Временной интервал, с которым берутся отсчёты, называется периодом дискретизации, или шагом дискретизации, или интервалом дискретизации. Период дискретизации будем обозначать T , а в тех редких случаях, когда это обозначение окажется перегруженным, будем использовать обозначение T_d . Величины $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$

и $f_d = \frac{1}{T}$, связанные между собой равенством $\omega_d = 2\pi f_d$, называются круговой и линейной частотами дискретизации соответственно.

Квантование дискретного сигнала (преобразование его в цифровой) даёт возможность представления отсчётов на конечно-разрядной сетке электронно-вычислительной машины. Это обеспечивается благодаря тому, что значения квантованного сигнала могут соответствовать одному из разрешённых уровней значений, называемых уровнями квантования. Количество уровней квантования ограничено. Если значения квантуемого сигнала выходят за установленные пределы – происходит его ограничение.

1.3. Квантование сигналов

Квантование может осуществляться как с равномерным, так и с неравномерным шагом. В дальнейшем будем рассматривать квантование с равномерным шагом, при котором уровни квантования соответствуют узлам равномерной сетки с шагом Δ , заданной в области значений квантуемого сигнала.

Квантование может осуществляться путём округления или усечения значений дискретного сигнала. При усечении значение квантованного сигнала, соответствует i -му уровню квантования, пока значение исходного сигнала не превышает $i + 1$ -й уровень:

$$s_i \leq s < s_{i+1} \Rightarrow s_{\text{КВ}} = s_i. \quad (1.1)$$

Пример характеристики квантователя при усечении показан на рис.1.4.

При округлении значение квантованного сигнала получается по правилу:

$$s_i - \frac{\Delta}{2} \leq s < s_i + \frac{\Delta}{2} \Rightarrow s_{\text{КВ}} = s_i. \quad (1.2)$$

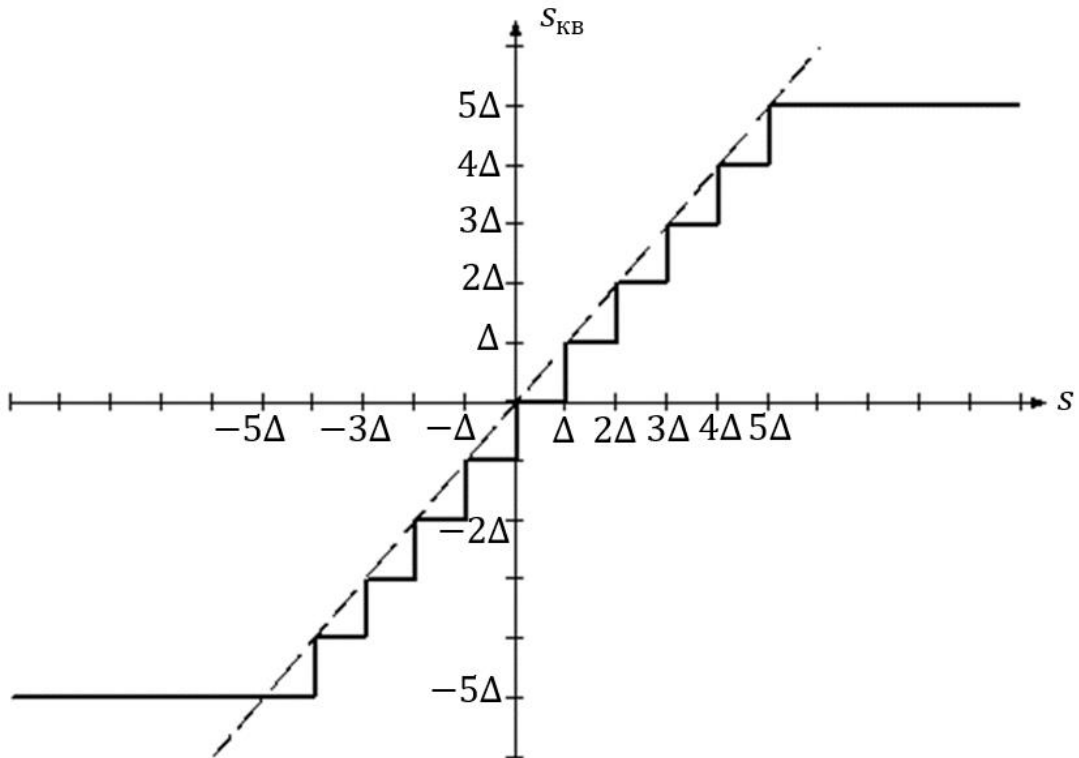


Рис.1.4. Характеристика квантователя при усечении

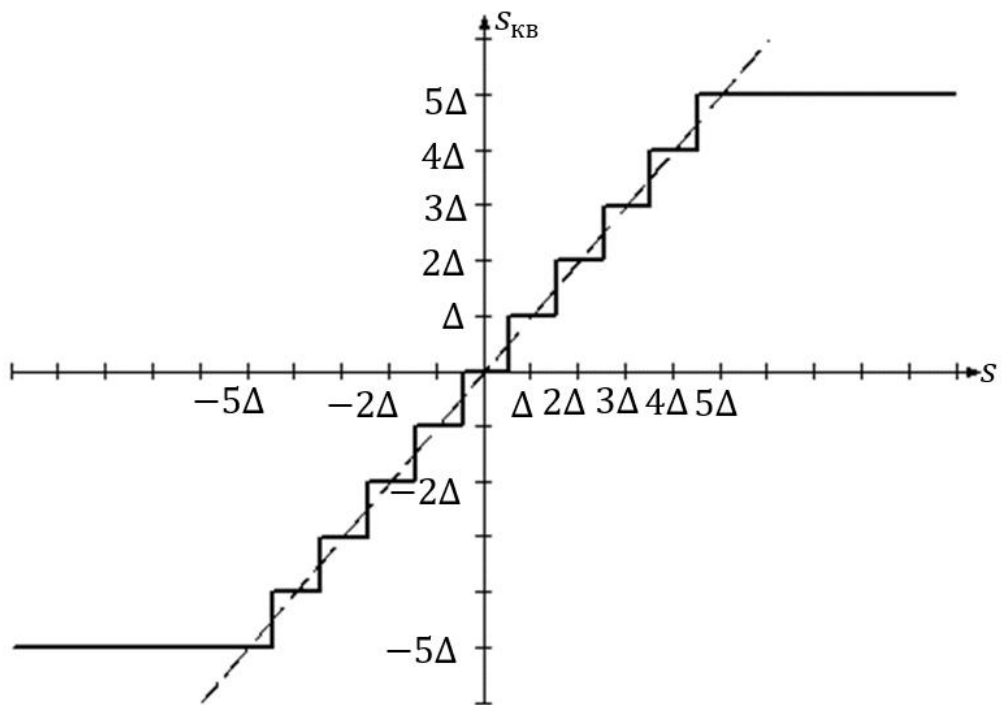


Рис.1.5. Характеристика квантователя при округлении

Пример характеристики квантователя при округлении пока-

зан на рис.1.5. Пунктиром на рис.1.4 и 1.5 показана линия $s_{\text{КВ}} = s$.

В результате квантования дискретного сигнала получается цифровой сигнал, который представляет собой упорядоченную последовательность чисел, отличающихся от точных значений исходного сигнала в моменты дискретизации. Полагая отличия малыми, для учёта этого различия вводят так называемый шум квантования $e(t)$:

$$s_{\text{ц}}(t) = s_{\text{д}}(t) + e(t). \quad (1.3)$$

Таким образом, квантователь, являясь по сути нелинейным устройством, рассматривается как линейное шумящее устройство, то есть полагают, что при квантовании к исходному сигналу добавляется шум, пренебрегая при этом эффектами, характерными для нелинейных устройств. В качестве примера на рис. 1.6 показан пример реализации шума квантования при преобразовании гармонического сигнала, для наглядности квантование показано без учёта дискретизации.

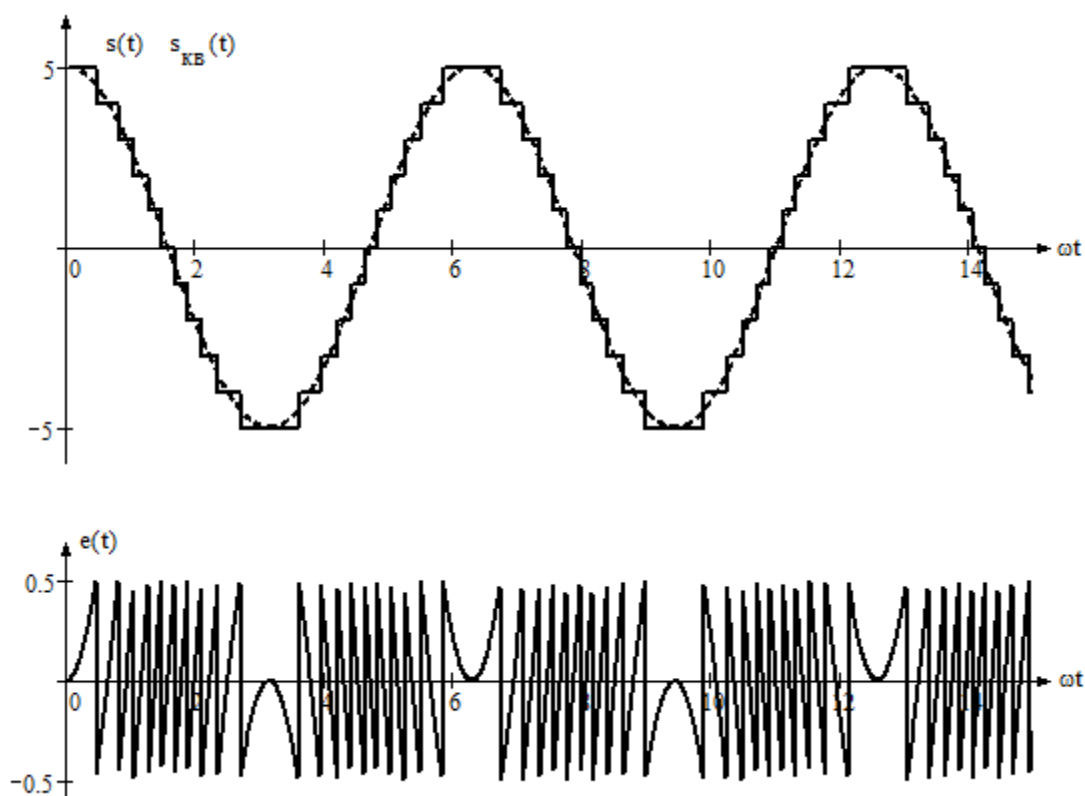


Рис.1.6. Гармонический сигнал, результат его квантования с округлением и реализация шума квантования

Обычно полагают, что шум квантования как минимум слабостационарен и имеет равномерное распределение (рис.1.7).

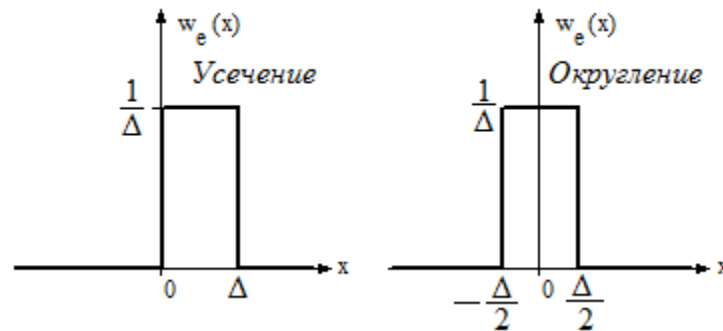


Рис.1.7. Графики плотности вероятности шума квантования при усечении и округлении

В случае усечения математическое ожидание шума квантования равно половине шага квантования $M\{e_{\text{усеч}}\} = \frac{\Delta}{2}$. При округлении математическое ожидание шума квантования равно нулю $M\{e_{\text{окр}}\} = 0$. Дисперсия (средняя мощность) шума квантования $\sigma_e^2 = \frac{\Delta^2}{12}$.

Ненулевое среднее шума квантования при усечении формально можно трактовать как наличие систематической ошибки при преобразовании аналогового сигнала в цифровой, что указывает на преимущество квантования с округлением, однако техническая реализация квантования с усечением оказывается более простой, что и обуславливает его распространённое практическое применение.

При выборе шага квантования учитывают, что на практике обрабатываемый сигнал всегда оказывается искажён помехами, представляющими собой, например, неизбежно налагающиеся на полезный сигнал собственные шумы устройств, недостаточно подавленные внешние помехи и т.п. В простейшем случае рассматривают модель, в которой обрабатываемый сигнал $s_{\text{ВХ}}(t)$ представляется в виде аддитивной смеси полезного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$:

$$s_{\text{ВХ}}(t) = s(t) + n(t).$$

Будем считать полезный сигнал и шум независимыми стационар-

ными случайными процессами. Средняя мощность рассматриваемых случайных процессов определяется их дисперсией σ_s^2 и σ_n^2 соответственно. Качество аддитивной смеси полезного сигнала и шума на входе квантователя будем характеризовать отношением сигнал/шум, которое определим как отношение средней мощности полезного сигнала к средней мощности шума:

$$q_{\text{ВХ}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}. \quad (1.4)$$

Полагая, что действие квантователя на обрабатываемый сигнал сводится к аддитивному наложению шума квантования, сигнал на выходе будем рассматривать, как аддитивную смесь полезного сигнала, шума и шума квантования:

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = s(t) + n(t) + e(t).$$

Считая независимыми полезный сигнал, шум и шум квантования, для отношения сигнал/шум на выходе квантователя запишем:

$$q_{\text{ВЫХ}} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2 + \sigma_e^2} = \frac{1}{\frac{1}{q_{\text{ВХ}}} + \frac{1}{q_e}}, \quad (1.5)$$

где $q_e = \frac{\sigma_e^2}{\sigma_s^2}$ - отношение сигнал/шум квантования, характеризующее качество смеси сигнал+шум квантования.

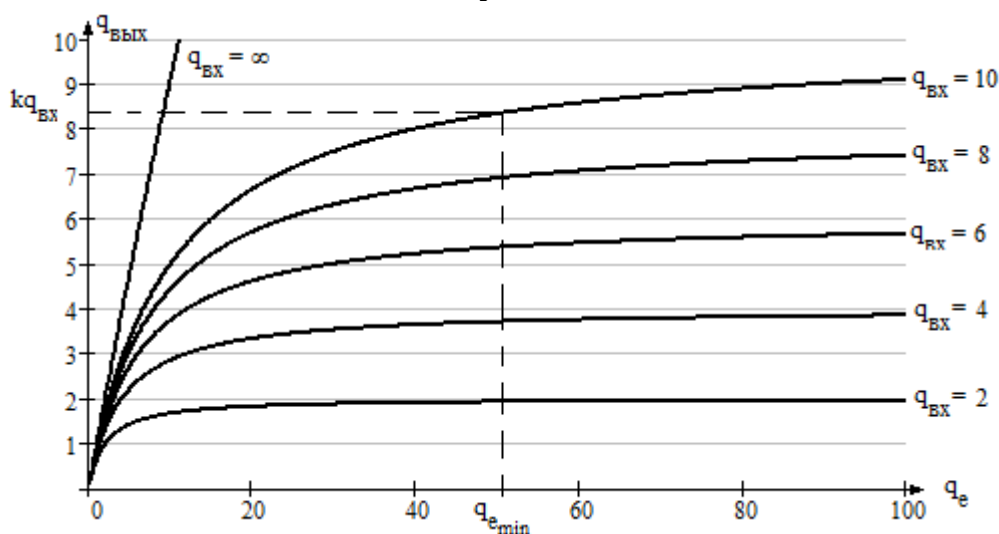


Рис.1.8. Отношение сигнал шум на выходе квантователя

Выражение (1.5) определяет семейство кривых, отра-

жающих взаимосвязь качества сигнала на выходе квантователя и качества смеси сигнал+шум квантования. Параметром семейства является отношение сигнал/шум на входе квантователя рис.1.8.

Из графиков видно, что при фиксированном отношении сигнал/шум на входе, начиная с некоторого значения q_e , отношение сигнал/шум на выходе начинает изменяться слабо, медленно асимптотически приближаясь к отношению сигнал/шум на входе. При этом увеличение отношения сигнал/шум квантования практически не улучшает качество сигнала, то есть приводит лишь к более точному представлению аддитивного шума $n(t)$.

С учётом сказанного, при определении максимального шага квантования, можно задаться допустимым ухудшением качества сигнала, например, потребовать, чтобы оно составляло 70-90% от исходного, то есть:

$$\begin{aligned} q_{\text{ВЫХ}} &= kq_{\text{ВХ}}, \\ k &= 0,7 \div 0,9. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Рассматривая совместно (1.5) и (1.6) получим

$$\frac{1}{\frac{1}{q_{\text{ВХ}}} + \frac{1}{q_{e.\text{min}}}} = kq_{\text{ВХ}},$$

откуда выразим минимальное отношение сигнал/шум квантования, при котором обеспечивается потеря качества не хуже допустимого:

$$q_{e.\text{min}} = \frac{k}{1-k} q_{\text{ВХ}},$$

или

$$\sigma_{e.\text{max}}^2 = \frac{1-k}{k} \sigma_n^2.$$

Подставляя выражение для дисперсии шума квантования, для максимального значения шага квантования, при котором обеспечивается качество сигнала не хуже заданного, получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{max}} &= 2\sigma_n \sqrt{3 \frac{1-k}{k}}, \\ \Delta_{\text{max}} &= (1,16 \div 2,27) \sigma_n. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Таким образом, при грубых оценках можно полагать, что

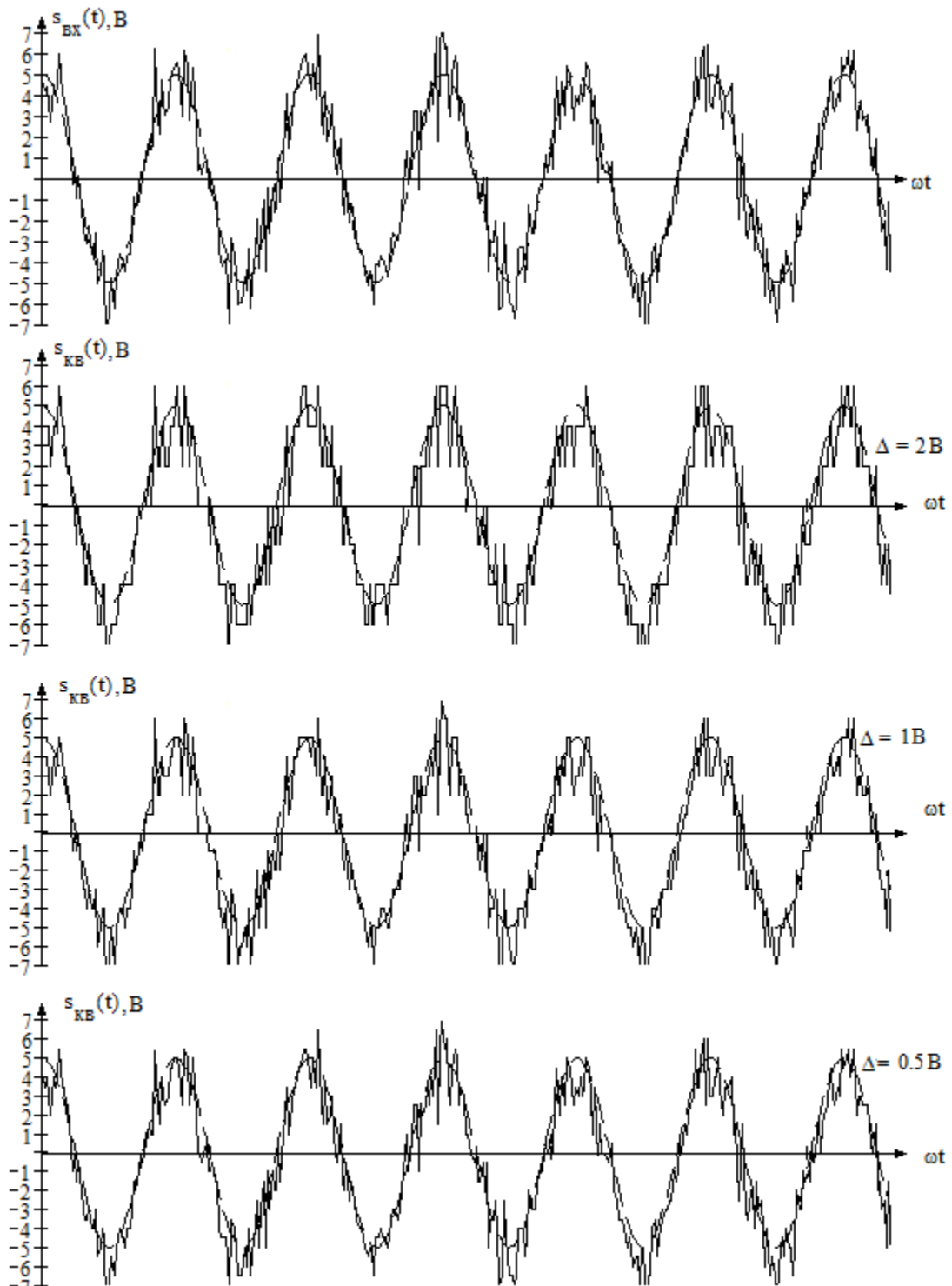


Рис.1.9. Квантование смеси гармонического сигнала и аддитивного гауссова шума при $q_{ВХ} = 10$.

шаг квантования должен выбираться меньшим, чем удвоенное среднеквадратическое отклонение аддитивного шума на входе: $\Delta \leq 2\sigma_n$. Среднеквадратическое отклонение приблизительно характеризует коридор, в котором с большой вероятностью обнаруживаются значения шума. Уменьшение шага квантования, та-

ким образом, рано или поздно приводит лишь более точному представлению шума, о чём уже говорилось выше.

В качестве числового примера рассмотрим квантование с округлением смеси гармонического сигнала со случайной начальной фазой с амплитудой $A = 5\text{В}$ и гауссова аддитивного шума при отношении сигнал/шум на входе $q_{\text{ВХ}} = 10$. Средняя

мощность полезного сигнала $\sigma_s^2 = \frac{A^2}{2}$, дисперсия шума

$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_s^2}{q_{\text{ВХ}}} = \frac{A^2}{2q_{\text{ВХ}}}$, среднеквадратическое отклонение шума

$\sigma_n = \frac{A}{\sqrt{2q_{\text{ВХ}}}} = \frac{5}{\sqrt{2 \cdot 10}} = 1,12\text{В}$, шаг квантования $\Delta \leq 2,24\text{В}$. Вре-

менные диаграммы сигналов, при различном выборе шага квантования показаны на рис.1.9: первая диаграмма соответствует исходному сигналу, остальные квантованным с последовательным уменьшением шага квантования $\Delta = 2; 1; 0,5\text{В}$.

Отметим, что изложенный подход к выбору шага квантования не является единственно-возможным: при решении конкретных практических задач могут формулироваться иные исходные критерии.

1.4. Разрядность цифровых устройств обработки сигналов

Полученная в результате дискретизации и квантования упорядоченная во времени последовательность чисел представляется в цифровых устройствах в двоичном коде. В простейшем случае кодирование сопоставляет каждому уровню квантования уникальное двоичное число, и количество разрядов должно обеспечивать представление такого количества различных двоичных чисел, которое не меньше, чем требуемое для представления сигнала количество уровней квантования. Обозначив размах сигнала $h = \max(s_{\text{ВХ}}(t)) - \min(s_{\text{ВХ}}(t))$, количество уровней квантования, требуемых для представления сигнала, найдём в виде:

$$N_{\text{КВ}} \geq \frac{h}{\Delta} - 1. \quad (1.8)$$

Количество двоичных разрядов, требуемое для уникального

представления $N_{\text{КВ}}$ различных чисел даётся выражением:

$$B \geq \log_2 N_{\text{КВ}} = \log_2 \left(\frac{h}{\Delta} - 1 \right). \quad (1.9)$$

При заданном размахе сигнала количество требуемых разрядов даётся полученным выражением.

Вернёмся к модели обрабатываемого сигнала из п.1.3 в виде аддитивной смеси двух независимых стационарных случайных процессов, один из которых рассматривается как полезный сигнал, а второй – как шум. Дисперсия результирующего процесса $\sigma_{\text{ВХ}}^2 = \sigma_s^2 + \sigma_n^2$. В виду неравенства Чебышёва

$$P \left\{ |s_{\text{ВХ}}(t) - M \{s_{\text{ВХ}}(t)\}| \geq k_s \sigma_{\text{ВХ}} \right\} \leq \frac{1}{k_s^2}$$

для стационарного случайного процесса можно выделить симметричный относительно среднего значения процесса коридор значений, шириной $2k_s \sigma_{\text{ВХ}}$, вне которого его значения маловероятны. Например, при $k_s = 3$ вероятность обнаружить значения случайного процесса вне коридора шириной $3\sigma_{\text{ВХ}}$ не превосходит 0,1. Поэтому размах сигнала в рамках рассматриваемой модели можно приближённо принять равным $h \approx 2k_s \sigma_{\text{ВХ}} = 2k_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_n^2}$. Подставляя это выражение в (1.9) и оценивая $\Delta \leq 2\sigma_n$, получим:

$$\begin{aligned} B \geq \log_2 \left(\frac{k_s \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_n^2}}{\sigma_n} - 1 \right) &= \log_2 \left(k_s \sqrt{\frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} + 1} - 1 \right) = \\ &= \log_2 \left(k_s \sqrt{q_{\text{ВХ}}} + 1 - 1 \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

При больших отношениях сигнал/шум на входе из последнего выражения получим грубую оценку требуемого числа разрядов цифровых устройств в зависимости от качества обрабатываемого сигнала:

$$B|_{q_{\text{ВХ}} \gg 1} \geq \log_2 \left(k_s \sqrt{q_{\text{ВХ}}} \right). \quad (1.11)$$

График, соответствующий нижней границе требуемого количества разрядов, определяемой (1.11), показан на рис.1.10 при $k_s = 3$.

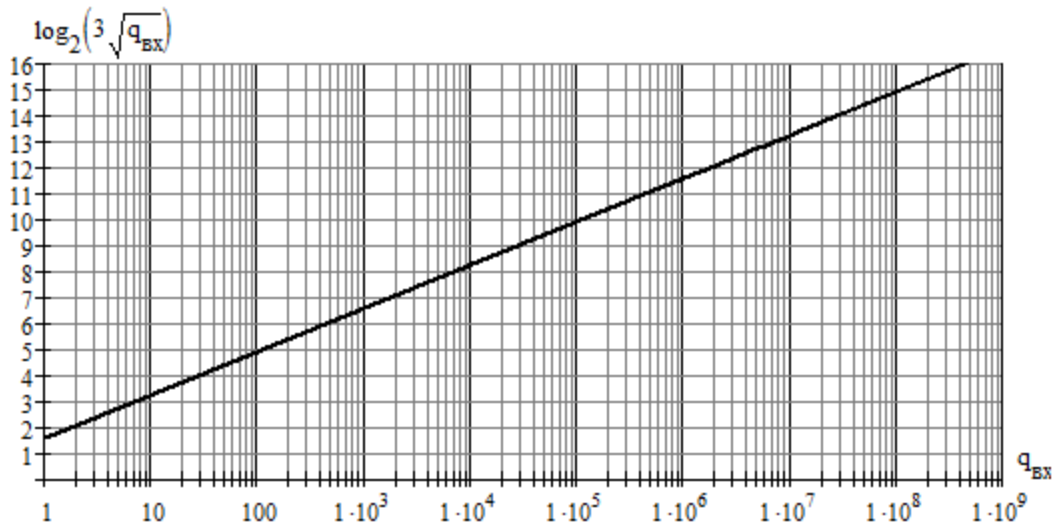


Рис.1.11. Нижняя граница количества разрядов при заданном качестве обрабатываемого сигнала

В качестве числового примера найдём отношение сигнал/шум, соответствующее 8 разрядам. Из (1.11) получаем $q_{\text{вх}} \leq 7282$. При $q_{\text{вх}} = 7282$ среднеквадратическое отклонение шума меньше среднеквадратического отклонения сигнала примерно в 85 раз.

Рассмотренная шумовая модель квантователя позволяет выбрать требуемую разрядность представления мгновенных значений обрабатываемого сигнала. После выбора требуемой разрядности шум квантования для упрощения не учитывают, то есть считают, что значения цифрового сигнала совпадают с соответствующими значениями дискретного сигнала. Иначе говоря, рассматривают асимптотику, которая имела бы место при неограниченном увеличении количества разрядов. Дальнейшее изложение материала будет проводиться также исходя из этого предположения.

1.5. Обобщённая структурная схема системы цифровой обработки сигналов

Обобщённая структурная схема системы цифровой обработки сигналов показана на рис.1.12. На входе системы обычно присутствует фильтр нижних частот (ФНЧ). Связано это с тем, что, как будет показано в дальнейшем, в системе ЦОС могут быть корректно обработаны только сигналы, максимальная частота спектра которых не превышает некоторого максимального значе-

ния, определяемого периодом дискретизации. ФНЧ на входе подавляет нежелательные гармоники сигналов.

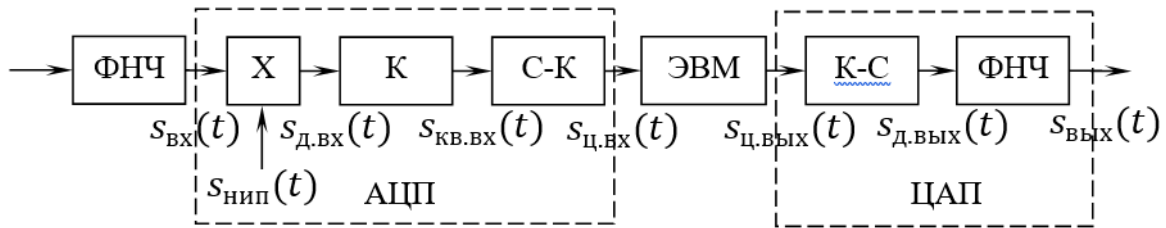


Рис.1.12. Обобщённая структурная схема системы ЦОС

Примеры временных диаграмм, соответствующие рис.1.12 показаны на рис.1.13. Сигнал $s_{ВХ}(t)$ преобразуется в дискретный $s_{Д,ВХ}(t)$ умножением на несущую импульсную последовательность $s_{НИП}(t)$, представляющую собой периодическую последовательность импульсов, длительность которых гораздо меньше периода дискретизации. Полученный дискретный сигнал квантуется в квантователе К. Цифровой сигнал $s_{КВ,ВХ}(t)$ в преобразователе «сигнал-код» С-К преобразуется в форму $s_{Ц,ВХ}(t)$, характерную для цифровых устройств ЭВМ и в простейшем случае представляет собой двухуровневый кодированный сигнал в виде групп импульсов, количество которых соответствует разрядности цифровых устройств, а уровни импульсов соответствуют логическим символам нулю и единице.

Способы кодирования могут быть различными. В примере на рис.1.13 кодирование заключается в двоичном представлении тремя разрядами номера уровня квантования, соответствующего текущему импульсу $s_{КВ,ВХ}(t)$. Код, соответствующий текущему импульсу, появляется с некоторой задержкой, необходимой для выполнения кодирования. В рассматриваемом примере такая задержка принята равной периоду дискретизации — кодовая комбинация для текущего импульса появляется только в начале следующего интервала дискретизации.

Преобразование аналогового сигнала в цифровой называется аналого-цифровым преобразованием, а соответствующее устройство — аналого-цифровым преобразователем (АЦП). На рис.1.13 структурная схема функционально отражает принципы АЦП и никак не связана со структурой этого устройства при его технической реализации.

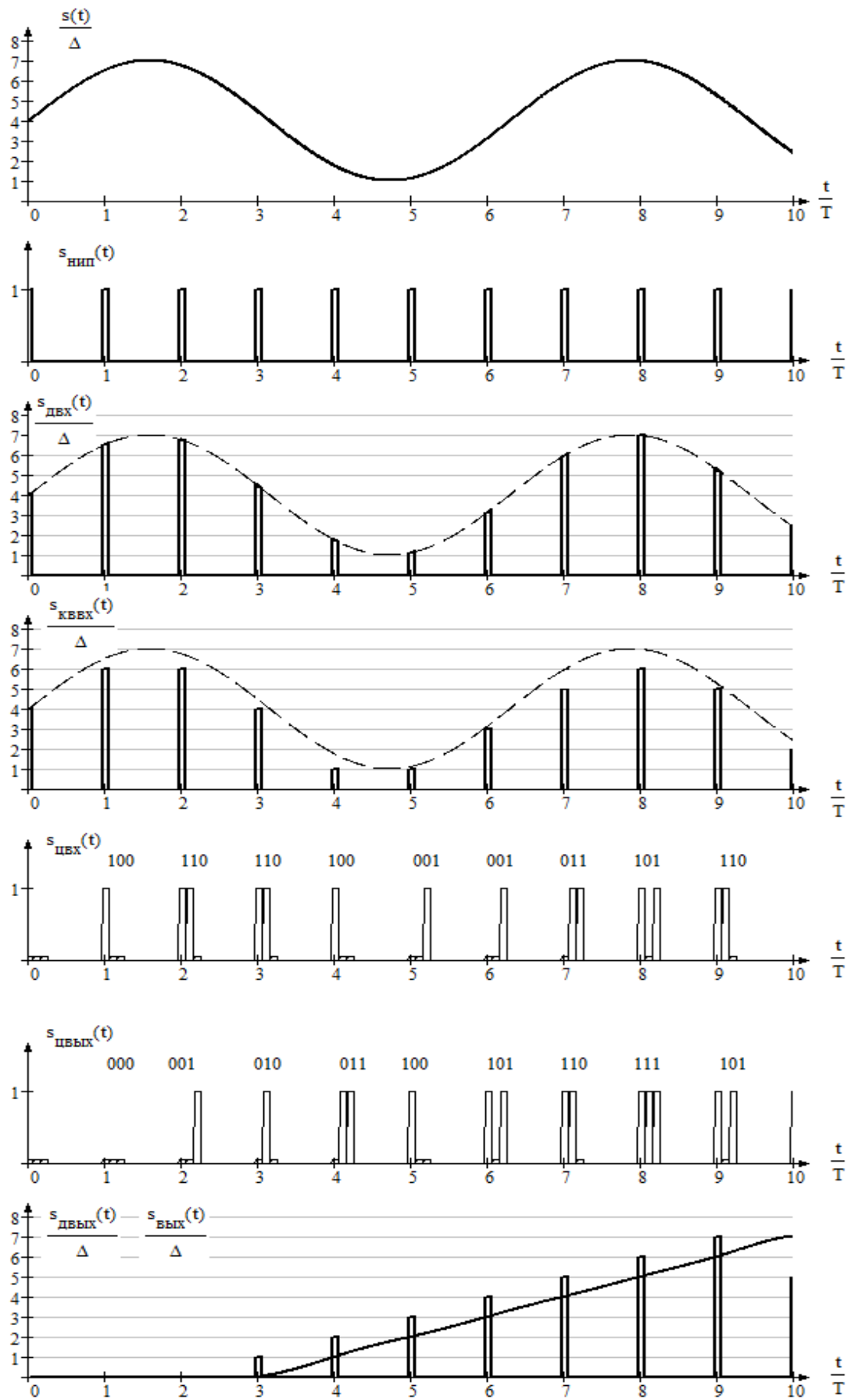


Рис.1.13. Временные диаграммы сигналов в системе ЦОС

В результате обработки ЭВМ цифрового сигнала $s_{\text{Ц.ВХ}}(t)$ по заданному алгоритму формируется результат $s_{\text{Ц.ВЫХ}}(t)$ в виде цифрового сигнала, отражающего последовательность двоичных кодов. Реакция ЭВМ на текущий входной отсчёт появляется с некоторой задержкой, определяемой временем, требуемым для выполнения алгоритма ЦОС. В примере на рис.1.13 реакция на текущий входной отсчёт появляется на следующем интервале дискретизации.

Сигнал $s_{\text{Ц.ВЫХ}}(t)$ обрабатывается преобразователем «код-сигнал» К-С, в результате чего формируется последовательность импульсов $s_{\text{д.ВЫХ}}(t)$, их высота соответствует уровням квантования, номер которых был представлен в виде двоичного кода. Каждый импульс появляется с соответствующей задержкой.

Аналоговый сигнал $s_{\text{ВЫХ}}(t)$ на выходе получается на выходе ФНЧ, на вход которого воздействует $s_{\text{д.ВЫХ}}(t)$. Подробнее процедура преобразования дискретного сигнала в аналоговый (цифро-аналоговое преобразование (ЦАП)) будет рассмотрена позже.